（2017,06,29 发布）www.qptj.com

系统方法与栾生素数猜想

王瑞林
镇赉县交通运输局 吉林镇赉（137300）
chinawrl@126.com

摘要：本文用系统方法证明了栾生素数猜想为真。

关键词：栾生素数猜想，

The system approach and Twin prime conjecture

WANG Rui-lin
Transportation Bureau of Zhenlai County　Jilin Zhenlai of China (137300)
chinawrl@126.com

Abstract:　In this paper we have proved Twin prime conjecture is true by the system approach.

Key Words:　Twin prime conjecture

§1. 引言

孪生素数就是指相差 2 的素数对，例如 5 和 7，11 和 13…。这个猜想正式由西希尔伯特在 1900 年国际数学家大会的报告上第 8 个问题中提出，可以这样描述：

存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$ 是素数。

本文[ ]表示只取其内的整数部分；丨 是对称线，不表整除；— 有时也做对称线使用。

§2. 对称组合分布

定义：我们将若干个元素按照组合的机制，在一条对称线两侧的分布形式，称为对称组合分布，用丨表示对称线（**特别注意**：本文丨不表整除）。具体如下：

两个元素 a,b 只有 1 种分布形式：$a \mid b$. 我们将 $a \mid b$ 与 $b \mid a$ 视为同一种形式，即 a 在一侧，b 在另一侧。

三个元素 a,b,c 有 3 种分布形式：$bc \mid a$, $ac \mid b$, $ab \mid c$, 即一个在一侧，两个在另一侧。

四个元素 a,b,c,d 有 7 种分布形式：$a \mid bcd$, $b \mid acd$, $c \mid abd$, $d \mid abc$, $ab \mid cd$, $ac \mid bd$, $ad \mid bc$.

五个元素 a,b,c,d,e 有 15 种分布形式：$a \mid bcde$, $b \mid acde$, $c \mid abde$, $d \mid abce$, $e \mid abcd$, $ab \mid cde$, $ac \mid bde$, $ad \mid bce$, $ae \mid bcd$, $bc \mid aed$, $bd \mid aec$, $be \mid acd$, $cd \mid abe$, $ce \mid abd$, $de \mid abc$.

….

定理 1　用 T_u 表示 u 个元素做对称组合分布时的分布种数，有

$$T_u = 2^{u-1}-1. \tag{1}$$

证　显然，$T_2=\frac{1}{2}\binom{2}{1}=\frac{1}{2}\left(\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right)-1,$

$$T_3=\binom{3}{1}=\frac{1}{2}\left(\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right)-1,$$

$$T_4=\binom{4}{1}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}=\frac{1}{2}\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)-1,$$

$$T_5=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=\frac{1}{2}\left(\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right)-1,$$

$\cdots$，$T_u=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{u}\binom{u}{j}-1,$　再由组合公式 $\sum_{j=0}^{u}\binom{u}{j}=2^u$，易见(1)成立。本定理证毕。

定理 2　下式成立：

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=1. \tag{2}$$

证　(2)左为 $1-(1+(-1))^n$.　本定理证毕。

§3.　四个交错级数及其向正项级数的转化

定理 3　令 $X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，且令

$$\Lambda(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{3}$$

$$\Phi(X)=\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)-3\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)+7\left(\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}+\cdots+\frac{1}{x_{n-3}x_{n-2}x_{n-}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}(2^n-1)\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{4}$$

$$\Gamma(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+4\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{5}$$

$$\Omega(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-3\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+7\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}(2^{n-1}-1)\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{6}$$

有

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{x_2-1}{x_2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3-1}{x_3}\left(\frac{1}{x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\left(\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}}\left(\frac{1}{x_n},\right.\right.\right.\right.\right. \tag{7}$$

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{x_2-1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}\cdot+\cdots+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{x_2-1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}}\cdot\frac{1}{x_n}, \tag{7-1}$$

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1x_2}+\frac{(x_1-1)(x_2-1)}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)\cdots(x_{n-1}-1)}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{7-2}$$

$$\Lambda(X)=1-\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right) \tag{7-3}$$

$$\Phi(X)=\frac{1}{2}-\left(\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right)-\frac{1}{2}\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right)\right), \tag{8}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{x_2-2}{x_2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3-2}{x_3}\left(\frac{1}{x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\left(\frac{x_{n-1}-2}{x_{n-1}}\left(\frac{1}{x_n},\right.\right.\right.\right.\right. \tag{9}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{x_2-2}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}\cdot+\cdots+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{x_2-2}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{n-1}-2}{x_{n-1}}\cdot\frac{1}{x_n}, \tag{9-1}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1x_2}+\frac{(x_1-2)(x_2-2)}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_1-2)(x_2-2)\cdots(x_{n-1}-2)}{x_1x_2\cdots x_n}, \tag{9-2}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{2}\left(1-\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right)\right), \tag{9-3}$$

$$\Omega(X)=\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right)-\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right). \tag{10}$$

证 逐个拨离(3)之变量得(7),(7-1),(7-2), 做$1-\Lambda(X)$且再一次拨离变量得(7-3). 逐个拨离(4)之变量得(9),(9-1),(9-2), 做$1-\Gamma(X)$且再一次拨离变量得(9-3). 由(3),(4),(5),(6)有 $\Gamma(X)=\Lambda(X)-\Phi(X)$, $\Omega(X)=\Gamma(X)-\Phi(X)=\Lambda(X)-2\Phi(X)$, 显然(8), (10)成立。本定理证毕。

如果觉得“拨离变量”操作困难，展开(7-3)可得(3), 展开(9-2)可得(4). 不久将看到$\Lambda(X)$对应奇合数的生成机制，计算N_c时要用到；$\Phi(X)$对应奇合数对的生成机制， $\Omega(X)$对应由一个奇素数与一个奇合数组成的混合数对的生成机制， $\Gamma(X)$应用于奇素数对的生成机制中。

§4. 奇数的方根素数系统（OSRS）

O表奇数，令q_n为小于$\sqrt{O}$的最大奇素数，为素数表中第n个奇素数；将不大于$\sqrt{O}$的奇素数称为方根素数，用Q表其集合，元素从小到大排列，即

$$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,\cdots,q_{n-2},q_{n-1},q_n\}. \tag{11}$$

显然 $q_1=3$, $q_2=5$, $q_3=7$, $q_4=11$, $\cdots$.

o,p,c分别表奇数，奇素数，奇合数，将奇数1计入奇合数（不影响论证）； 将奇数O包含的序列填加上方根素数的运动足迹，即方根素数3从原位跃起，每3行一个足迹，方根素数5从原位跃起，每5行一个足迹，方根素数7从原位跃起，每7行一个足迹，方根素数11从原位跃起，每11行一个足迹，…，制成图，称奇数的方根素数系统，简称OSRS. 为节省页面，我们已将图从中间折回。审稿时要把折回的部分申直，以免误解。

例1 $O=127$

				127	1				
		5		125	3				
			3	123	5				
11				121	7				

	7			119	9	3			
			3	117	11				
		5		115	13				
				113	15	3	5		
			3	111	17				
				109	19				
				107	21	3		7	
	7	5	3	105	23				
				103	25		5		
				101	27	3			
11			3	99	29				
				97	31				
		5		95	33	3			11
			3	93	35		5	7	
	7			91	37				
				89	39	3			
			3	87	41				
		5		85	43				
				83	45	3	5		
			3	81	47				
				79	49			7	
11	7			77	51	3			
		5	3	75	53				
				73	55		5		11
				71	57	3			
			3	69	59				
				67	61				
		5		65	63	3		7	

令 D 表示系统中奇数的个数， N_p 和 N_c 分别表示系统中奇素数与奇合数的个数，有

$$D = \frac{O+1}{2}, \tag{12}$$

$$N_p = D - N_c. \tag{13}$$

将图中两个含有方根素数 3 足迹的行之间的区域，即不含方根素数 3 的足迹的“两行”，称为数对区（region of pair numbers），那两行中间的横线称对称线（Symmetrical line），上边那行称上行（upper line），下边那行称下行（lower line）。全体数对区组成的系统称 T 系统。注意，第一个数对区的上边界是方根素数 3 本身。T 表示数对区的个数，简单算法，

$$T = D/3, \tag{14}$$

而一般情况是

$$D = 3T + 1, \tag{15}$$

或是 $D = 3T + 2$.

令 $L(3)$ 表示系统中含有方根素数 3 足迹的行及方根素数 3 本身所在行的和，简单算法

$$L(3) = D/3. \tag{16}$$

令 $N(T)_c$ 和 $N(T)_p$ 分别表示全体数对区内，即 T 系统内，奇合数与奇素数的个数。若某个数对区上行奇数的右边有方根素数之足迹， 该奇数为 c，否则为 p；若某个数对区下行奇数的右边有方根素数之足迹， 则该奇数为 c，否则为 p. 于是， 同一数对区上下两行奇数组成的数对或为奇合数对 $\frac{c}{c}$ 或为奇素数对 $\frac{p}{p}$ 或为奇素数与奇合数组成的混和数对 $\frac{p}{c}$. (注意此处 “－”是对称线，不是除号)，我们用 $N(T)_{\frac{c}{c}}$， $N(T)_{\frac{p}{p}}$， $N(T)_{\frac{p}{c}}$ 分别表示这些数对的个数，显然有

$$N(T)_{\frac{c}{c}}+N(T)_{\frac{p}{p}}+N(T)_{\frac{p}{c}}=T. \tag{17}$$

令 $N(T)_{pu},N(T)_{pl},N(T)_{cu},N(T)_{cl}$ 分别表示 T 系统，即全体数对区，上行和下行奇数中 p 的个数及上行和下行奇数中 c 的个数， 容易看出 T 系统内存在几个最基本的关系，首先是

$$N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_{pu}-\left(N(T)_{cl}-N(T)_{\frac{c}{c}}\right), \tag{18}$$

$$N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_{pl}-\left(N(T)_{cu}-N(T)_{\frac{c}{c}}\right), \tag{19}$$

此二式亦可写为 $N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_{pu}-\left(T-N(T)_{pl}-N(T)_{\frac{c}{c}}\right)$， $N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_{pl}-\left(T-N(T)_{pu}-N(T)_{\frac{c}{c}}\right)$，由此显然有

$$N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_{pu}+N(T)_{pl}+N(T)_{\frac{c}{c}}-T. \tag{20}$$

注意到方根素数 3 没被划到数对区内，所以有

$$N_p=N(T)_p+1=N(T)_{pu}+N(T)_{pl}+1. \tag{21}$$

于是(20)可写为

$$N(T)_{\frac{p}{p}}=N_p-1+N(T)_{\frac{c}{c}}-T, \tag{22}$$

由(13),(15)，易见(20)又可写为

$N(T)_{\frac{p}{p}}=N(T)_p+N(T)_{\frac{c}{c}}-T=N_p-1+N(T)_{\frac{c}{c}}-T=D-N_c-1+N(T)_{\frac{c}{c}}-T=3T+1-N_c-1+N(T)_{\frac{c}{c}}-T$，即

$$N(T)_{\frac{p}{p}}=2T-\left(N_c-N(T)_{\frac{c}{c}}\right). \tag{23}$$

为便于理解，审读本文前，最好先审读《系统方法与偶数表两素数之和》。

关于(24)式的说明： (23)是 OSRS 几个基本关系中最重要的一个。相关变量说明如下：第一，N_p 与划数对区无关，N_c 由 N_p 得来，即由(13), 即 $N_c=D-N_p$ 得来，所以 N_c 也与划数对区无关。第二，$N(T)_{\frac{c}{c}}$ 与划数对区有关。创生 $\frac{c}{c}$ 是在 T 系统，即在数对区。创生 $\frac{c}{c}$ 的运动由 5 至 q_n 即 $n-1$ 个方根素数担当。数对区有 T 个，全体数对区里共有奇数 $2T$ 个。

§ 5. 方根素数在 OSRS 中的相对位置关系－本文之出发点

方根素数之运动足迹在 T 系统，即在全体数对区对称线上、下的相对位置关系是本文的出发点。

奇合数对 $\frac{c}{c}$ 的生成机制 由对称组合分布理论： 两个元素 a,b 首次出现在某数对区对称线上、

下，后每隔 ab 个数对区再出现一次，如例 1, 第 20 个数对区，对称线上行为方根素数 7, 下行为方根素数 11, 此情况，往下每隔 7×11 个数对区出现一次。 例子如果举的大一点还会看到对称线上行为方根素数 11, 下行为方根素数 7, 此情况也往下每隔 7×11 个数对区出现一次。 这与（1+1）中奇合数对的生成机制是相同的。（1+1）图是看左右，栾生素数是看上下。因为页面的局限，例 1 很小，没出现 3 个方根素数同时出现在某一个数对区的情况。若画一个大数的图会看到 3 个方根素数，例如 5,7,11，以三种形式（每种形式包括两个表现）出现在同一个数对区内。 第一种形式： 甲表现 是 5 在上，7, 11 在下；乙表现 5 在下，7, 11 在上；第二种形式：甲表现 7 在上，5, 11 在下，乙表现 7 在下，5, 11 在上；第三种形式：甲表现 11 在上，5, 7 在下，乙表现 11 在下，5, 7 在上。 每种形式都是每 $5\times7\times11$ 个数对区出现一次。所以每种形式的贡献是 $\left[\dfrac{2T}{5\cdot7\cdot11}\right]$, 三种形式的总贡献是 $3\left[\dfrac{2T}{5\cdot7\cdot11}\right]$. 其中的“2”就是两个表现的“两”。其中的“3”就是三种形式中的“三”。 4 个方根素数，例如 5,7,11,13，以七种形式（每种形式包括两个表现）出现在同一个数对区内。 …，见 §2 对称组合分布。

§6. 主要量的计算

定理 4 令 N_c 表示 OSRS 内奇合数的个数，R_c 表[ ]内的小数的代数和，D 表系统内奇数的个数有

$$N_c=\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-\left(\left[\frac{D}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot7}\right]+\cdots\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+\left(\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7}\right]+\right.$$

$$\left.\left[\frac{\mathrm{D}}{3\cdot5\cdot11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot q_n}\right]+1-n. \tag{24}$$

$$N_{\mathrm{c}}=D\left(1-\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)\right)+1-n+R_c, \tag{25}$$

证 由 OSRS 及(12)，由容斥原理以及 1 被计入奇合数，很容易得出(24). 打开[ ]，由定理 3 之 $\Lambda(X)$ 表达的容斥过程有(25). 本定理证毕。

定理 5 令 $N(T)_c$ 表示 T 系统，即全体数对区内的奇合数的个数，有

$$N(T)_c=\left(\left[\frac{2T}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{2T}{q_n}\right]\right)-\left(\left[\frac{2T}{5\cdot7}\right]+\cdots\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+\left(\left[\frac{2T}{5\cdot7\cdot11}\right]+\cdots\right.$$

$$\left.+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\left[\frac{D}{5\cdot7\cdot\cdots\cdot q_n}\right]-n. \tag{26}$$

$$N(T)_c=2T\left(1-\prod_{5\le p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)\right)-n+R_c, \tag{27}$$

$$N_c-N(T)_c=\frac{D}{3}. \tag{28}$$

证 T 系统，即全体数对区内奇合数的创生也可以独立地看。 例 1 第 4 数对区的下行出现方根素数 5 的足迹，在第 10 数对区下行再次出现；第 6 数对区的上行出现方根素数 5 的足迹，在第 11 数对区上行再次出现；所以方根素数 5 有两个表现， 总的贡献应记为 $\left[\dfrac{2T}{5}\right]$. 式中的“2”就是“两个表现”的“两”。参见(24),(25), 显然有(26),(27). 由(25),(27),(14) 有

$$N_c-N(T)_c=D-2T+\left\langle D\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{q_n-1}{q_n}-\frac{2D}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{q_n-1}{q_n}\right\rangle=D-\frac{2D}{3}=\frac{D}{3}.$$

(28)是说，创生奇合数在 OSRS 系统，还是在T系统，两者之结果相差$\frac{D}{3}$. 本定理证毕。

定理 6 当O不是很大时，$\frac{c}{c}$之实际个数似乎更接近不用[ ]时的计算结果，而为了得到一个统一的公式，我们还是使用[ ]，R_{c-c}表[ ]内的小数的代数和，有

$$N(T)_{\frac{c}{c}} = \left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-1}q_n}\right]\right) - 3\left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7\cdot 11}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)$$

$$+7\left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)\left[\frac{D}{5\cdot 7\cdot 11\cdot\cdots\cdot q_n}\right] - n. \quad (29)$$

$$N(T)_{\frac{c}{c}} = T - 2T\prod_{5\le p\le q_n}\left(1-p^{-1}\right) + T\prod_{5\le p\le q_n}\left(1-2p^{-1}\right) - n + R_{c-c} \quad (30)$$

证 根据方根素数运动足迹在数对区上、下行的相对位置关系，对称组合分布理论，定理 1，以及定理 3 中$\Phi(X)$表达的容斥过程，(4),(8), 且注意到(14), 显然有(29),(30).

定理 7 栾生素数猜想为真。

证 我们要用(23)式来得出本文之最终结论。 (23)亦即$N(T)_{\frac{p}{p}} = 2T - \left(N_c - N(T)_{\frac{c}{c}}\right)$, §4 关于(23)式的说明中说：“$N_c$与划数对区无关，$N(T)_{\frac{c}{c}}$与划数对区有关，创生$\frac{c}{c}$，创生工作由方根素数 5 开头，创生$\frac{c}{c}$是在$T$系统。” 且由定理 5 知“创生奇合数在 OSRS 系统还是在T系统，两者结果相差$\frac{D}{3}$.” 我们的目标是数对区，式子必须在T系统写，要用到$\Gamma(X) = \mathrm{A}(X) - \Phi(X)$. 于是(23)写为

$$N(T)_{\frac{p}{p}} = 2T - \left\langle\left(N(T)_c + \frac{D}{3}\right) - N(T)_{\frac{c}{c}}\right\rangle = 2T - \left(N(T)_c - N(T)_{\frac{c}{c}}\right) - \frac{D}{3}$$

$$N_{\frac{p}{p}} = 2T - \left\langle\left(\left(\left[\frac{2T}{5}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_n}\right]\right) - 2\left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-1}q_n}\right]\right) + 4\left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7\cdot 11}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. -8\left(\left[\frac{2T}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\right] + \cdots + \left[\frac{2T}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right) + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1}\left[\frac{2T}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot\cdots\cdot q_n}\right]\right\rangle - \frac{D}{3}. \quad (31)$$

由(5),(9-3),(13)且令E表示包含奇数序列O的偶数，易见(30)可化为

$$N(T)_{\frac{p}{p}} = \left(2T - \frac{D}{3}\right) - 2T\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \prod_{5\le p\ge q_n}\left(1-2p^{-1}\right)\right) = \frac{D}{3}\prod_{5\le p\le q_n}\left(1-2p^{-1}\right) = D\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right) = \frac{E}{2}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right), \quad (32)$$

由此可认定栾生素数猜想为真。

注意到，作者《系统方法与偶数表两素数之和》一文中，具有第一空集结构的偶数能表成素数对的个数为$N_{p-p} = \frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)$, 显见有 $N(T)_{\frac{p}{p}} = 2N_{p-p}$. 无疑，$N(T)_{\frac{p}{p}}$ 也就是$N_{\frac{p}{p}}$. 本定理证毕。

§7. 结语

“对称”太重要。心静如禅的时候画一张 OSRS 长图，越长越好，不要折回。将方根素数 3 所在行和含方根素数 3 足迹的行用铅笔涂黑，数对区就明显地暴露在阳光下了。两行中间的那条线就是对称线，将其涂红。细看一下方根素数 5,7,11,13 在对称线上、下的分布规律，栾生素数的存在就不足为奇了。