用系统方法证哥德巴赫猜想

摘要：本文用系统方法证明了哥德巴赫猜想第一命题为真。
关键词：(1+1)，哥德巴赫猜想，偶数表两素数之和，系统方法。

第一章　引言

作者赞同《百度百科》对系统方法的论述，"系统方法是指把对象作为系统，进行定量化、模型化和择优化研究的科学方法，其根本特征在于从系统的整体性出发，把分析与综合、分解与协调、定性与定量研究结合起来，精确处理部分与整体的辩证关系。"

不小于 6 的偶数可表为两个奇素数之和，是哥德巴赫猜想两命题中的第一个，另一个可由此推出，常被称作 (1+1)。

本文是作者 1992 年春节前寄往某杂志，被退回的一篇文章《偶数表两素数之和》的改写，基本思路未变，退稿尚存。作者在另一文中说过，观察(1+1), 有两个角度，一是"量"，二是"序"。本文是从"量"的角度，但与(9+9), (3+4), (1+3),(1+2)根本不同，出发点不是同余。

[ ]表示只取其内的整数部分，符号$\cap$, $\cup$及丨本文有自己的用法。

第二章　对称组合分布

定义：我们将若干个元素按照组合的机制，在一条对称线两侧的分布形式，称为对称组合分布，用丨表示对称线（**特别注意**：本文丨不表整除）。具体如下：

两个元素a,b只有 1 种分布形式：$a \mid b$. 我们将$a \mid b$ 与 $b \mid a$ 视为同一种形式，即a在一侧，b在另一侧。

三个元素a,b,c有 3 种分布形式：$bc \mid a$, $ac \mid b$, $ab \mid c$, 即一个在一侧，两个在另一侧。

四个元素a,b,c,d有 7 种分布形式：$a \mid bcd$, $b \mid acd$, $c \mid abd$, $d \mid abc$, $ab \mid cd$, $ac \mid bd$, $ad \mid bc$.

五个元素a,b,c,d,e有 15 种分布形式：$a \mid bcde$, $b \mid acde$, $c \mid abde$, $d \mid abce$, $e \mid abcd$, $ab \mid cde$, $ac \mid bde$, $ad \mid bce$, $ae \mid bcd$, $bc \mid aed$, $bd \mid aec$, $be \mid acd$, $cd \mid abe$, $ce \mid abd$, $de \mid abc$.

⋯.

定理 1　用T_u表示u个元素做对称组合分布时的分布种数，有

$$T_u = 2^{u-1} - 1. \tag{1}$$

证　显然，$T_2 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\left(\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right) - 1,$

$$T_3=\binom{3}{1}=\frac{1}{2}\left(\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right)-1,$$

$$T_4=\binom{4}{1}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}=\frac{1}{2}\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)-1,$$

$$T_5=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=\frac{1}{2}\left(\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right)-1,$$

$\cdots$， $T_u=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{u}\binom{u}{j}-1,$ 再由组合公式 $\sum_{j=0}^{u}\binom{u}{j}=2^u$，易见(1)成立。本定理证毕。

定理 2 下式成立：

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=1. \tag{2}$$

证 (2)左为 $1-(1+(-1))^n$. 本定理证毕。

第三章 四个交错级数及其向正项级数的转化

定理 3 令 $X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，且令

$$\Lambda(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{3}$$

$$\Phi(X)=\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)-3\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)+7\left(\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}+\cdots+\frac{1}{x_{n-3}x_{n-2}x_{n-}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}(2^n-1)\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{4}$$

$$\Gamma(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+4\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{5}$$

$$\Omega(X)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-3\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)+7\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)-\cdots+(-1)^{n-1}(2^{n-1}-1)\frac{1}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{6}$$

有

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{x_2-1}{x_2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3-1}{x_3}\left(\frac{1}{x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\left(\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}}\left(\frac{1}{x_n},\right.\right.\right.\right.\right. \tag{7}$$

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{x_2-1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}\cdot+\cdots+\frac{x_1-1}{x_1}\cdot\frac{x_2-1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}}\cdot\frac{1}{x_n}, \tag{7-1}$$

$$\Lambda(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-1}{x_1x_2}+\frac{(x_1-1)(x_2-1)}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)\cdots(x_{n-1}-1)}{x_1x_2x_3\cdots x_n}, \tag{7-2}$$

$$\Lambda(X)=1-\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right) \tag{7-3}$$

$$\Phi(X)=\frac{1}{2}-\left(\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right)-\frac{1}{2}\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right)\right), \tag{8}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{x_2-2}{x_2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3-2}{x_3}\left(\frac{1}{x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\left(\frac{x_{n-1}-2}{x_{n-1}}\left(\frac{1}{x_n},\right.\right.\right.\right.\right. \tag{9}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{x_2-2}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}\cdot+\cdots+\frac{x_1-2}{x_1}\cdot\frac{x_2-2}{x_2}\cdots\cdots\frac{x_{n-1}-2}{x_{n-1}}\cdot\frac{1}{x_n}, \tag{9-1}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1x_2}+\frac{(x_1-2)(x_2-2)}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_1-2)(x_2-2)\cdots(x_{n-1}-2)}{x_1x_2\cdots x_n}, \tag{9-2}$$

$$\Gamma(X)=\frac{1}{2}\left(1-\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right)\right), \tag{9-3}$$

$$\Omega(X)=\prod_{x\in X}\left(1-x^{-1}\right)-\prod_{x\in X}\left(1-2x^{-1}\right). \tag{10}$$

证 逐个拨离(3)之变量得(7),(7-1),(7-2), 做$1-\Lambda(X)$且再一次拨离变量得(7-3). 逐个拨离(4)之变量得(9),(9-1),(9-2), 做$1-\Gamma(X)$且再一次拨离变量得(9-3). 由(3),(4),(5),(6)有 $\Gamma(X)=\Lambda(X)-\Phi(X)$, $\Omega(X)=\Gamma(X)-\Phi(X)=\Lambda(X)-2\Phi(X)$, 显然(8), (10)成立。本定理证毕。

如果觉得“拨离变量”操作困难，展开(7-3)可得(3), 展开(9-2)可得(4). 不久将看到$\Lambda(X)$对应奇合数的生成机制和奇合数对中的同因子$c-c$（即$c\cup c$）的生成机制，计算N_c和算$N_{c\cup c}$时要用到；$\Phi(X)$对应奇合数对中的异因子$c-c$（即$c\cap c$）的生成机制，计算$N_{c\cap c}$时要用到；$\Omega(X)$对应由一个奇素数与一个奇合数组成的混合数对的生成机制，计算N_{p-c}时要用到；$\Gamma(X)$应用于奇素数对的生成机制中，计算N_{p-p}时要用到，它对应着N_c-N_{c-c}.

第四章　偶数的方根素数系统（ESRS）

E表偶数，令q_n为小于$\sqrt{E}$的最大奇素数，为素数表中第n个奇素数；将不大于$\sqrt{E}$的奇素数称为方根素数，用Q表其集合，元素从小到大排列，即

$$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,\cdots,q_{n-2},q_{n-1},q_n\}. \tag{11}$$

显然 $q_1=3$, $q_2=5$, $q_3=7$, $q_4=11$, $\cdots$.

o, p, c分别表奇数，奇素数，奇合数，将奇数 1 计入奇合数（不影响论证）；且令α_0为非负整数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$为正整数，$v$为正整数，将偶数的唯一分解定理写为

$$E=2\times2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_v^{\alpha_v}, \tag{12}$$

其中$p_1<p_2<p_3<\cdots<p_v$，且令

$$P=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_v\}, \tag{13}$$

$$S=Q\cap P, \tag{14}$$

而且令K表示以Q为全集时S之补集。

将偶数E包含的奇数序列从中间折回，填加上方根素数的运动足迹，即方根素数 3 从原位跃起，

每 3 行一个足迹，方根素数 5 从原位跃起，每 5 行一个足迹，方根素数 7 从原位跃起，每 7 行一个足迹，方根素数 11 从原位跃起，每 11 行一个足迹，…，制成图，称偶数的方根素数系统，简称 ESRS.

例 1　$E = 128 = 2 \times 2^6$，

				127	1				
		5		125	3				
			3	123	5				
11				121	7				
	7			119	9	3			
			3	117	11				
		5		115	13				
				113	15	3	5		
			3	111	17				
				109	19				
				107	21	3		7	
	7	5	3	105	23				
				103	25		5		
				101	27	3			
11			3	99	29				
				97	31				
		5		95	33	3			11
			3	93	35		5	7	
	7			91	37				
				89	39	3			
			3	87	41				
		5		85	43				
				83	45	3	5		
			3	81	47				
				79	49			7	
11	7			77	51	3			
		5	3	75	53				
				73	55		5		11
				71	57	3			
			3	69	59				
				67	61				
		5		65	63	3		7	

例 2:　$E = 124 = 2 \times 2^1 \times 31$,

			3	123	1				
11				121	3				
	7			119	5				
			3	117	7				
		5		115	9	3			
				113	11				
			3	111	13				

				109	15	3	5		
				107	17				
	7	5	3	105	19				
				103	21	3		11	
				101	23				
11			3	99	25		5		
				97	27	3			
		5		95	29				
			3	93	31				
	7			91	33	3			11
				89	35		5	7	
			3	87	37				
		5		85	39	3			
				83	41				
			3	81	43				
				79	45	3	5		
11	7			77	47				
		5	3	75	49			7	
				73	51	3			
				71	53				
			3	69	55		5		11
				67	57	3			
		5		65	59				
	7		3	63	61				

例 3: $E=122=2\times 61$,

11				121	1				
	7			119	3				
			3	117	5				
		5		115	7				
				113	9	3			
			3	111	11				
				109	13				
				107	15	3	5		
	7	5	3	105	17				
				103	19				
				101	21	3		11	
11			3	99	23				
				97	25		5		
		5		95	27	3			
			3	93	29				
	7			91	31				
				89	33	3			11
			3	87	35		5	7	
		5		85	37				

				83	39	3			
			3	81	41				
				79	43				
11	7			77	45	3	5		
		5	3	75	47				
				73	49			7	
				71	51	3			
			3	69	53				
				67	55		5		11
		5		65	57	3			
	7		3	63	59				
				61	61				

例 4: $E=126=2\times3^2\times7$,

		5		125	1				
			3	123	3				
11				121	5				
	7			119	7				
			3	117	9	3			
		5		115	11				
				113	13				
			3	111	15	3	5		
				109	17				
				107	19				
	7	5	3	105	21	3		7	
				103	23				
				101	25		5		
11			3	99	27	3			
				97	29				
		5		95	31				
			3	93	33	3			11
	7			91	35		5	7	
				89	37				
			3	87	39	3			
		5		85	41				
				83	43				
			3	81	45	3	5		
				79	47				
11	7			77	49			7	
		5	3	75	51	3			
				73	53				
				71	55		5		11
			3	69	57	3			
				67	59				
		5		65	61				

	7		3	63	63	3		7	

系统横称行，纵称列，正中间的那条纵线称对称线；对称线左右（紧临对称线）的两列奇数分别称左列奇数和右列奇数；同一行两列奇数的和为 E. 我们用 L 表系统之行数，D 表系统内奇数的个数（重复的只计入一次），显然有

$$D = E/2. \tag{15}$$

L 和末行结构，因 E 之结构不同分两种情况：$\alpha_0 = 0$, 末行左右两列奇数皆为 $E/2$,

$$L = E/4 + 1/2 \tag{16}$$

$\alpha_0 \neq 0$, 末行左列奇数为 $E/2+1$, 末行右列奇数为 $E/2-1$,

$$L = E/4. \tag{17}$$

因 q_n 为小于 $\sqrt{E}$ 的最大奇素数，显然有

$$\frac{q_n^2+1}{4} \leq L. \tag{18}$$

若某个右列奇数的右边有方根素数之足迹，该奇数为 c, 否则为 p; 若某个左列奇数的左边有方根素数之足迹，该奇数为 c, 否则为 p. 于是，同一行左右两列奇数组成的数对或为奇合数对 $c-c$, 或为奇素数对 $p-p$, 或为奇素数与奇合数组成的混和数对 $p-c$. 我们用 N_{c-c}， N_{p-p}， N_{p-c} 分别表示这些数对的个数，显然有

$$N_{c-c} + N_{p-c} + N_{p-p} = L. \tag{19}$$

$c-c$ 有两种，左右两侧方根素数之足迹相同，称为同因子 $c-c$, 记为 $c \cup c$; 左右两侧方根素数之足迹相异，称为异因子 $c-c$, 记为 $c \cap c$; 两者的交集记为 $c \cup c \bigcap c \cap c$（特别注意：$\cup$ 和 $\cap$ 本文仅作此用），于是有

$$N_{c-c} = N_{c\cup c} + N_{c\cap c} - N_{c\cup c\bigcap c\cap c}. \tag{20}$$

令 $N_{pl}, N_{pr}, N_{cl}, N_{cr}$ 分别表示 ESRS 左列和右列奇数中 p 的个数及左列和右列奇数中 c 的个数，容易看出系统内存在几个最基本的关系，首先是

$$N_{p-p} = N_{pr} - (N_{cl} - N_{c-c}), \tag{21}$$

$$N_{p-p} = N_{pl} - (N_{cr} - N_{c-c}), \tag{22}$$

此二式亦可写为 $N_{p-p} = N_{pr} - (L - N_{pl} - N_{c-c})$, $N_{p-p} = N_{pl} - (L - N_{pr} - N_{c-c})$, 由此显然有

$$N_{p-p} = N_{pr} + N_{pl} + N_{c-c} - L. \tag{23}$$

当 $E \neq 2\times p_1$ 时， $N_{pr} + N_{pl} = N_p$，(23)可写为

$$N_{p-p} = N_p + N_{c-c} - L, \tag{24}$$

$$N_{c-c} = L - N_p + N_{p-p}, \tag{25}$$

此时 $N_p = \frac{E}{2} - N_c$， $L = \frac{E}{4}$， 所以(24)又可化为

$$N_{p-p} = L - (N_c - N_{c-c}), \tag{26}$$

$E \neq 2\times p_1$ 时，由系统内奇合数 c 与奇素数 p 之总量有 $N_{p-c} = N_c - 2N_{c-c}$， $N_{p-c} = N_p - 2N_{p-p}$， 由此有

$$\frac{N_c - N_p}{2} = N_{c-c} - N_{p-p}. \tag{27}$$

还注意到，由(19)有

$$N_{p-p}=L-\left(N_{p-c}+N_{c-c}\right). \tag{28}$$

$E=2\times p_1$时， $N_{p_r}+N_{p_l}=N_p+1$, (23)可写为

$$N_{p-p}=N_p+1+N_{c-c}-L, \tag{24a}$$

$$N_{c-c}=L-N_p-1+N_{p-p}, \tag{25a}$$

第五章 偶数结构之分类

由(11),(12),(13),(14)知偶数结构可分成两大类.：S 为空集和 S 为非空集合。

定理 4 E 的所有结构中，只有三种结构 S 为空集。第一结构：$E=2\times 2^{\alpha_0}$, $\alpha_0\neq 0$; 第二结构：$E=2\times 2^{\alpha_0}\ p_1$，$\alpha_0\neq 0$, $p_1>\sqrt{2^{\alpha_0+1}}$; 第三结构：$E=2\,p_1$.

证 我们证此三种结构以外，S 不可能为空集。 首先从 Q,P,S 之定义，S 为 Q,P 之交，Q 包含了小于 $\sqrt{E}$ 的所有奇素数，P 的元素皆为奇素数， 所以 S 为空集时，P 的元素一定都大于 $\sqrt{E}$. 其次不难看出，在所有情况中， $E=2\,p_1 p_2$ 时 S 为空集之嫌疑最大，所以我们只需证 $E=2\,p_1 p_2$ 时 S 不是空集则可，且易见只证 p_1,p_2 中只少有一个小于 $\sqrt{E}$ 则可。 我们用反证法， 令 $p_1<p_2$，若 $p_1>\sqrt{E}$, 必有 $p_2>\sqrt{E}$, 于是有 $2\,p_1 p_2>2E$, 与 $E=2\,p_1 p_2$ 相悖，所以一定有 $p_1<\sqrt{E}$. 本定理证毕。我们将这三种空集结构分别称为第一，第二，第三空集结构。

第六章 方根素数在 ESRS 中的相对位置关系－本文之出发点

方根素数之运动足迹在 ESRS 对称线两侧的相对位置关系是本文的出发点，是本文与(9+9), (3+4), (2+3), ⋯, (1+2)在思想方法上的根本不同。对称组合分布为此理论服务。

异因子 $c-c$ （即 $c\cap c$ ）的生成机制 由对称组合分布理论：两个元素 a,b 首次同行于对称线两侧后每隔 ab 行同行一次，如例 1, 5丨3 首次出现在第 2 行，之后出现在第 17 行，第 32 行，绕过末行转为 3丨5; 7丨3 首次出现在第 5 行，之后出现在第 26 行，绕过末行转为 3丨7; 三个元素 a,b,c 以 3 种组合形式分别出现在对称线两侧后每 abc 行分别出现一次，四个元素 a,b,c,d 以 7 种组合形式分别出现在对称线两侧后每 $abcd$ 行分别出现一次，⋯. 请细看对称组合分布理论，不再重述，定理 3 中 $\Phi(X)$ 表达的容斥过程与此对应。

同因子 $c-c$（即 $c\cup c$ ）的生成机制 S 为非空集合时，S 的元素之间生成 $c\cup c$. 若 $a\in S$, 则 a 之足迹首次同行于对称线两侧，即 a 丨 a 出现后，每 a 行出现一次。见例 4, 此例 $S=\{3,7\}$, 于是 3丨3 每 3 行出现一次（第 2,5,8,12,15,18,21,24,27,29,32 行），7丨7 每 7 行出现一次（第 4,11,18,25,32 行），两者之重叠每 3×7 行出现一次（第 11,32 行）。定理 3 中 $\Lambda(X)$.表达的容斥过程与此机制对应。

第七章 以上理论与本文举例之对照

例 1： $E=128=2\times 2^6$, $E=2\times 2^{\alpha_0}$, $\alpha_0\neq 0$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{\ \}$, $S=\{\ \}$, 第一空集结构，$L=E/4=32$, $N_{c-c}=N_{c\cap c}=5$, $N_{p-c}=24$, $N_{p-p}=3$, $N_{c-c}+N_{p-c}+N_{p-p}=L$, $5+24+3=32$.

例 2: $E=124=2\times 2^1\times 31$, $E=2\times 2^{\alpha_0}\ p_1$，$\alpha_0=1\neq 0$, $p_1=31>\sqrt{2^{\alpha_0+1}}=2$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{31\}$, $S=\{\ \}$, 第二空集结构， $N_{c-c}=N_{c\cap c}=7$, $N_{p-c}=19$, $N_{p-p}=5$, $L=E/4=31$, $N_{c-c}+N_{p-c}+N_{p-p}=L$,

$7+19+5=31.$

例 3: $E=122=2\times 61$, $E=2p_1$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{61\}$, $S=\{\ \}$, 第三空集结构, $N_{c-c}=N_{c\cap c}=5$, $N_{p-c}=22$, $N_{p-p}=4$, $\alpha_0=0$, $L=E/4+1/2=31$, $N_{c-c}+N_{p-c}+N_{p-p}=L$, $5+22+4=31.$

例 4: $E=126=2\times 3^2\times 7$, $E=2\times 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, $\alpha_0=0$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{3,7\}$, $S=Q\bigcap P=\{3,7\}$, $K=\{5,11\}$, $N_{c-c}=N_{c\cup c}+N_{c\cap c}-N_{c\cup c\cap c\cap c}=12+7-5=14$, $N_{p-c}=10$, $N_{p-p}=8$, $L=E/4+1/2=32$, $N_{c-c}+N_{p-c}+N_{p-p}=L$, $14+10+8=32.$

第八章 主要量的计算

定理 5 令 N_c 和 N_p 分别表示 ESRS 内奇合数与奇素数之个数, R_c 和 R_p 分别表[ ]内的小数的代数和, D 表系统内奇数的个数（重复的只计入一次）, 有

$$N_c=\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot 7}\right]+\cdots\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7}\right]+\left[\frac{\mathrm{D}}{3\cdot 5\cdot 11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot q_n}\right]+1-n. \tag{29}$$

$$N_{\mathrm{c}}=\frac{E}{2}\left(1-\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)\right)+1-n+R_c, \tag{30}$$

$$N_p=D-\left\langle\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot 7}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7}\right]+\cdots+\left[\frac{\mathrm{D}}{3\cdot 5\cdot 11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-\cdots+(-1)^{n-1}\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot q_n}\right]+1-n\right\rangle, \tag{31}$$

$$N_p=\frac{E}{2}\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)-1+n+R_p. \tag{32}$$

证 由 ESRS 及(15)，以及 1 被计入奇合数，很容易得出(29). 打开[ ]，由定理 3 之 $\Lambda(X)$ 表达的容斥过程有(30), 因 ESRS 中已非 c 即 p, 继而有(31),(32), 显然 $R_p=-R_c$. 本定理证毕。

定理 6 S 为空集，ESRS 内只生成 $c\cap c$。 E 不是很大时，由于开头（首次生成 $c\cap c$）赶前的原因，$c\cap c$ 之实际个数似乎更接近不用[ ]时的计算结果，当 E 很大时，开头的影响不再明显，为了得到一个统一的公式，我们还是使用[ ], R_{c-c} 表[ ]内的小数的代数和，有

$$N_{c-c}=N_{c\cap c}=\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot 7}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)-3\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)+7\left(\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-\ldots+(-1)^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)\left[\frac{D}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot\cdots\cdot q_n}\right]+1-n. \tag{33}$$

$$N_{c-c}=N_{c\cap c}=\frac{E}{4}-\frac{E}{2}\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)+\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)+1-n+R_{c-c}. \tag{34}$$

证 根据方根素数运动足迹在 ESRS 中的相对位置关系，对称组合分布理论，定理 1，以及定理 3 中 $\Phi(X)$ 表达的容斥过程，且注意到(25), 显然有(33),(34).

我们说的“开头的影响” 如例 1 第 17 行：5 ∣ 3, 11， 这种位置关系，每$3\times5\times11$行，即每 165 行出现一次，此例$D=64$, 按$\left[\frac{64}{3\cdot5\cdot11}\right]=0$, 而它却出来了。如果此例$D>182$, 即 17+165, 则第 182 行一定又是 5 ∣ 3, 11，这就是我们的理论：方根素数在对称线两侧的相对位置关系。理论没错，“开头出来”也没错，换个大偶数，划张图，就知道了。例 1 的第 18 行： 3 ∣ 5, 7，第 26 行：11,7 ∣ 3， 第 32 行：5 ∣ 3, 7 同样都是“开头”，使[ ]规则出现误差。偶数很大时，“开头的影响”基本上就可以忽了。

当然，我们也完全可以不用[ ], 去掉公式中的所有[ ]. 公式讲的是道理，是理论。关于整数的理论必然受小数的干扰，这很正常，干扰有多大，用实例做系统的检验就是了。

本定理证毕。

定理 7 S 为非空集合， ESRS 内不只生成$c\cap c$, S 的元素还将生成$c\cup c$, 而且$c\cap c$与$c\cup c$还会出现重叠。为了避免重复计入， 我们只考虑集合K的元素创建的$c\cap c.$。

令$S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots s_\tau\}$, $K=[k_1,k_2,k_3,\cdots k_{n-\tau}]$, $c\cap c(K)$表示K元素创建的$c\cap c$，有

$$N_{c\cup c}=\left(\left[\frac{L}{s_1}\right]+\left[\frac{L}{s_2}\right]+\cdots+\left[\frac{L}{s_m}\right]\right)-\left(\left[\frac{L}{s_1s_2}\right]+\left[\frac{L}{s_1s_3}\right]+\cdots+\left[\frac{L}{s_{\tau-1}s_\tau}\right]\right)+\left(\left[\frac{L}{s_1s_2s_3}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{L}{s_1s_2s_4}\right]+\cdots+\left[\frac{L}{s_{\tau-2}s_{\tau-1}s_\tau}\right]\right)-\cdots+(-1)^{\tau-1}\left[\frac{L}{s_1s_2\cdots s_\tau}\right]-\tau. \tag{35}$$

$$N_{c\cup c}=\frac{E}{4}\left(1-\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)\right)-\tau+R_{c\cup c},$$
$$=\frac{E}{4}-\frac{E}{4}\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)-\tau+R_{c\cup c}. \tag{36}$$

$$N_{c\cap c(K)}=\left(\left[\frac{D}{k_1k_2}\right]+\left[\frac{D}{k_1k_3}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{k_{n-\tau-1}k_{n-\tau}}\right]\right)-3\left(\left[\frac{D}{k_1k_2k_3}\right]+\left[\frac{D}{k_1k_2k_4}\right]+\right.$$
$$\left.\cdots+\left[\frac{D}{k_{n-\tau-2}k_{n-\tau-1}k_{n-\tau}}\right]\right)+\cdots+(-1)^{n-\tau}\left(2^{n-\tau-1}-1\right)\left[\frac{D}{k_1k_2k_3\cdots k_{n-\tau}}\right]+1-(n-\tau) \tag{37}$$

$$N_{c\cap c(K)}=\frac{E}{2}\left(\frac{1}{2}-\left(\prod_{p\in K}\left(1-p^{-1}\right)-\frac{1}{2}\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)\right)\right)+1-\tau+R_{c\cap c(K)},$$
$$=\frac{E}{4}-\frac{E}{2}\prod_{p\in K}\left(1-p^{-1}\right)+\frac{E}{4}\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)+1-\tau+{}_{c\cap c(K)}. \tag{38}$$

$$N_{c-c}=\frac{E}{2}-\frac{E}{2}\prod_{p\in K}\left(1-p^{-1}\right)-\frac{E}{4}\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)+\frac{E}{4}\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)+1-2\tau+R_{c\cup c}+R_{c\cap c(K)}+R_{c-c}, \tag{39}$$

$$N_{c-c}=\frac{E}{2}-\frac{E}{2}\prod_{p\in K}\left(1-p^{-1}\right)-\frac{E}{4}\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)+\frac{E}{4}\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)+1+R_{c-c}, \tag{40}$$

$\alpha_0=0$时，式中的$E/4$应改为$E/4+1/2$.

证 易见$c\cup c$之个数计算如(35), 容斥过程为$\Lambda(X)$, 因之有(36). K元素生成$c\cap c$, 参见定理 6, 有(38). $c-c$是$c\cup c$与$c\cap c$之和，于是有(39),(40). 本定理证毕。

定理 8 对于第一，第二空集结构，有

$$N_{p-p}=L-\left\langle\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-2\left(\left[\frac{D}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot7}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+4\left(\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7}\right]\right.\right.$$

$$\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\Bigg)-8\left(\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot11}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot13}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot q_n}\right]\Bigg\rangle \tag{41}$$

$$N_{p-p}=\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)-R_{p-p}. \tag{42}$$

对于第三空集结构，有

$$N_{p-p}=L-\Bigg\langle\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-2\left(\left[\frac{D}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot7}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+4\Bigg(\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7}\right]$$

$$\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\Bigg)-8\left(\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot11}\right]+\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot13}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\left[\frac{D}{3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot q_n}\right]\Bigg\rangle+1 \tag{43}$$

$$N_{p-p}=\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)+1-R_{p-p}. \tag{44}$$

S 为非空集合时，若 $\alpha_0\neq0$, 有

$$N_{p-p}=\frac{E}{4}\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)-(n-\tau)+R_{p-p}, \tag{45}$$

若 $\alpha_0=0$, 有

$$N_{p-p}=\left(\frac{E}{4}+\frac{1}{2}\right)\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)\prod_{p\in K}\left(1-2p^{-1}\right)-1-R_{p-p}. \tag{46}$$

证 对于第一、第二空集结构，由(26),(29),(33),(15),(17),以及(5), 有(41); 由(30),(33),(17)及(9-3)有(42). S 为非空集合， $\alpha_0\neq0$, 由(26),(30),(40),(15),(17)有(45); $\alpha_0=0$, (45)中的 $E/4$ 应改为 $E/4+1/2$, 于是得到(46). 本定理证毕。

定理 9 对于第一，第二空集结构，有

$$N_{p-c}=\left(\left[\frac{D}{3}\right]+\left[\frac{D}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_n}\right]\right)-3\left(\left[\frac{D}{3\times5}\right]+\left[\frac{D}{3\times7}\right]+\cdots\left[\frac{D}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+7\Bigg(\left[\frac{D}{3\times5\times7}\right]+$$

$$\left[\frac{D}{3\times5\times11}\right]+\cdots+\left[\frac{D}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\Bigg)-\cdots+(-1)^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)\left[\frac{D}{3\times5\times7\times\cdots\times q_n}\right]-1+n-2R_{c-c}. \tag{47}$$

$$N_{p-c}=\left(\frac{E}{2}\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)-1+n\right)-2\left(\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)\right)+R_c-2R_{c-c}. \tag{48}$$

$$N_{p-c}=\frac{E}{2}\left(\prod_{p\in Q}\left(1-p^{-1}\right)-\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)\right)-1+n+R_c-2R_{c-c}, \tag{49}$$

证 着眼于 E 内奇合数 c 之总量，系统有关系 $N_{p-c}=N_c-2N_{c-c}$, 由(29),(33)有(47), 由(30),(34)有(48),(49). 由(47)知 $p-c$ 生成机制由定理 3 中的 $\Omega(X)$ 表达。本定理证毕。

定理 10 对于(1+1), 只需讨论第一空集结构。

证 由(35),(36)显见 S 为非空集合时奇素数对多于 S 为空集时， 而第三空集结构只少有一个奇素数

对 p_1+p_1，于是显然，对于(1+1)，只需讨论第一和第二空集结构， 而第二空集结构 $c-c$ 之生成机制与第一空集结构完全相同，所以，只需讨论第一空集结构。本定理证毕。

定理 11　不小于 6 的偶数皆可表成两奇素数之和。

证　我们在定理 5,6,7,8, 9,10 的基础上， 走完证明(1+1)的最后路程，从多角度看(41),(42). 首先必须指出，(42)里的 R_{p-p} 只是打开(41)中的[ ]后，跑出来的纯小数的代数合，没有有别得东西，这与 Burn 筛法有本质的不同。

1. 对(41)做阶的估计：q_n 是小于 $\sqrt{E}$ 的最大奇素数，我们用 q_n 代替 $\sqrt{E}$. 素数分布比奇数稀疏，有 $q_n>2n$, 令 $q_n=2an$, $a>1$. 用 q 表示集合 Q 元素的平均值，为简捷，令 $q=\dfrac{q_n}{2}$，有 $q_n=2q$, $q=an$,

于是，显然 $D=\dfrac{E}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)^2}{2}=\dfrac{{q_n}^2}{2}=\dfrac{(2q)^2}{2}=2q^2=2a^2n^2$，$L=\dfrac{E}{4}=a^2n^2$，对于(41)，我们取前四项，有

$$N_{p-p}>a^2n^2-\binom{n}{1}\frac{2q^2}{q}+2\binom{n}{2}\frac{2q^2}{q^2}-4\binom{n}{3}\frac{2q^2}{q^3}=a^2n^2-2an^2+4\frac{n(n-1)}{2}-4\frac{n(n-1)(n-2)}{6an}$$

$$=a^2n^2-2an^2+2n^2-2n-\frac{2}{3a}n^2+\frac{2}{a}n-\frac{2}{a}=\left(a^2-2a+2-\frac{2}{3a}\right)n^2-\left(2-\frac{2}{a}\right)n-\frac{2}{a}>((a-1)n)^2,$$

回头看，有 $a=\dfrac{q_n}{2n}$. $q_n=97$, $n=24$, $a=\dfrac{97}{2\times 24}=2.02$, $q_n=262139$, $n=22999$, $a=\dfrac{262139}{2\times 22999}=5.7$.
显见，a 是个变数，随 n 而变，但变化极其缓慢。于是易见，可有 $N_{p-p}=O(n^2)$.

对 R_{p-p} 估计：我们把其内计算结果整数部分为零的[ ]称为零[ ]，不为零的称为非零[ ]. 作者做过实验，E 很大时，非零[ ]内小数的平均值接近 0.5，E 越大，越如此。而且没有理由认为非零[ ]内小数的平均值不符合统计规律。(41)$\langle\ \rangle$ 内第一项里没有零[ ]，第二项有一部分[ ]，之后各项零[ ]越来越多。我们将(41)$\langle\ \rangle$ 内第一项，第二项小数平均值按 0.5，即 $\dfrac{1}{2}$ 估计，第三项按 $\dfrac{1}{2}$ 除以 q,，即 $\dfrac{1}{2q}$ 估计。这是考虑到，第二项的零[ ] 走到第三项时，[ ]里的分母比第二项多一个方根素数；如：$E=128$，第二项里的 $\left[\dfrac{64}{7\cdot 11}\right]$ 已经是零[ ]，到了第三项的 $\left[\dfrac{64}{3\cdot 7\cdot 11}\right]$，$\left[\dfrac{64}{5\cdot 7\cdot 11}\right]$ 都比 $\left[\dfrac{64}{7\cdot 11}\right]$ 的分母多了一个方根素数。同理，第四项按 $\dfrac{1}{2}$ 除以 q^2 即 $\dfrac{1}{2q^2}$ 估计， 于是 $\langle\ \rangle$ 里小数的代数和估计为

$$\langle\xi_{1\to 4}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\binom{n}{1}-2\cdot\frac{1}{2}\binom{n}{2}+4\cdot\frac{1}{2q}\binom{n}{3}-8\cdot\frac{2}{4q^2}\binom{n}{4}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{n}{2}-\frac{n(n-1)}{2}+4\cdot\frac{1}{2an}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-8\frac{2}{4a^2n^2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{n}{2}-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{3a}-\frac{(n-2)(n-3)}{6a^2}\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3a}-\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{15a^3}\right)n^2+\left(1-\frac{1}{a}+\frac{5}{6a^2}-\frac{7}{15a^3}\right)n+\left(\frac{2}{3a}-\frac{1}{a^2}+\frac{12}{15a^3}\right)\right\rangle$$

$$R_{p-p}<\left|\langle\xi\rangle\right|=\left|\left\langle-\frac{1}{2}+\frac{1}{3a}-\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{15a^3}\right\rangle n^2\right|<\frac{1}{2}n^2.$$

至此，也显然有 $R_{p-p}=O(n^2)$. 主项与误差项同阶不等价，大小不同，主项大于误差项。

这里要说明的是，“令 $q_n=2an,\quad a>1,$ 于是有 $\sqrt{E}=2an;$ 用 q 表示 Q 元素的平均值，为简捷，令 $q=\dfrac{q_n}{2},$” 这一过程是近似处理，与真实有误差，而且很大，但是， 这一处理对 N_{p-p} 和 R_{p-p} 用的是同一手段，是公平的。谈“阶”，本来就是近似， 其实没必要。数论历史就这样了，不然不入流。

2. 走进全局， 再退回来，以实例诠释，看从左至右( )之间在数值大小的比例关系， 小数的产生过程，整数的容斥过程和小数的容斥过程及两者的结果，令 $W=\prod\limits_{p\in Q}p,$ 将 D 换成 W，(41),(42)化为

$$W_{p-p}=\frac{W}{2}-\left\langle\left(\left[\frac{W}{3}\right]+\left[\frac{W}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{W}{q_n}\right]\right)-2\left(\left[\frac{W}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{W}{3\cdot7}\right]+\cdots+\left[\frac{W}{q_{n-1}q_n}\right]\right)+4\left(\left[\frac{W}{3\cdot5\cdot7}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left[\frac{W}{3\cdot5\cdot11}\right]+\cdots+\left[\frac{W}{q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)-8\left(\left[\frac{W}{3\cdot5\cdot7\cdot11}\right]+\left[\frac{W}{3\cdot5\cdot7\cdot13}\right]+\cdots+\left[\frac{W}{q_{n-3}q_{n-2}q_{n-1}q_n}\right]\right)$$
$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\left[\frac{W}{3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot q_n}\right]\right\rangle \tag{50}$$

$$W_{p-p}=\frac{1}{2}\prod_{p\in Q}(p-2) \tag{51}$$

以 $E=2\times2^6=128$ 为例，$Q=\{3,5,7,11\},\quad W=3\cdot5\cdot7\cdot11,\quad D=E/2=64,$ (50)化为

$$W_{p-p}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{2}-\left\langle\left(\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{11}\right]\right)-2\left(\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{3\cdot5}\right]+\cdots+\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{7\cdot11}\right]\right)\right.$$
$$\left.+4\left(\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{3\cdot5\cdot7}\right]+\cdots+\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{5\cdot7\cdot11}\right]\right)-8\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{3\cdot5\cdot7\cdot11}\right]\right\rangle \tag{52}$$

$$W_{p-p}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{2}-\langle([5\cdot7\cdot11]+[3\cdot7\cdot11]+[3\cdot5\cdot11]+[3\cdot5\cdot7])$$
$$-2([7\cdot11]+[5\cdot11]+[5\cdot7]+[3\cdot11]+[3\cdot7]+[3\cdot5])+4([11]+[7]+[5]+[3])-8[1]\rangle,$$
$$=\frac{1155}{2}-\langle(385+231+165=105)-2(77+55+35+33+21++15)+4(11+7+5+3)-8(1)\rangle$$
$$=577.5-\langle886-2(236)+4(26)-8\rangle=577.5-\langle886-472+104-8\rangle=577.5-510=67.5 \tag{53}$$

$$W_{p-p}=\frac{1}{2}(3-2)(5-2)(7-2)(11-2)=67.5 \tag{54}$$

我们再把 $W=3\cdot5\cdot7\cdot11$ 换成 D, 即换成 64, 有

$$W_{p-p}=\frac{64}{2}-\left\langle\left(\left[\frac{64}{3}\right]+\left[\frac{64}{5}\right]+\left[\frac{64}{7}\right]+\left[\frac{64}{11}\right]\right)-2\left(\left[\frac{64}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{64}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{64}{3\cdot11}\right]+\left[\frac{64}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{64}{5\cdot11}\right]+\left[\frac{64}{7\cdot11}\right]\right)\right.$$
$$\left.+4\left(\left[\frac{64}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{64}{3\cdot5\cdot11}\right]+\left[\frac{64}{3\cdot7\cdot11}\right]+\left[\frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{5\cdot7\cdot11}\right]\right)-8\left[\frac{64}{3\cdot5\cdot7\cdot11}\right]\right\rangle$$

$$N_{p-p}=32-\langle([21.3]+[12.8]+[9.1]+[5.8])-2([4.3]+[3.0.]+[1.9]+[1.8]+[1.2]+[0.8])$$
$$+4([0.6]+[0.4]+[0.3]+[0.2])-8[0.1]\rangle,$$

$$R_{p-p}=\langle([0.3]+[0.8]+[0.1]+[0.8])-2([0.3]+[0.0.]+[0.9]+[0.8]+[0.2]+[0.8])$$

$$+4([0.6]+[0.4]+[0.3]+[0.2])-8[0.1]\rangle=\langle 2.0-2\times 3.0+4\times 1.5-0.8\rangle=\langle 1.2\rangle$$

$$N_{p-p}=32-\langle(21+12+9+5)-2(4+3+1+1+1+0)+4(0+0+0+0)-8(0)+1.2\rangle$$

$$=32-\langle 47-2\times 10+4\times 0-8\times 0+1.2\rangle=32-28.2=3.8$$

我们在定理 6 中说过，E 不是很大时，由于 $c\cap c$ 开头的影响，不用[ ]的计算结果更接近实际，本例即如此，真实 $N_{p-p}=3.$

3. **如果用**[2]**上册第** 16 **页公式**(2.11) $\prod_{2<p\le x}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{A+o(1)}{\log^2 x}$，**本文**(42)**主项化为**

$$\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)=\frac{E}{4}\prod_{2<p\le\sqrt{E}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{E}{4}\cdot\frac{A+o(1)}{\log^2\sqrt{E}}=\frac{E}{4}\cdot\frac{A+o(1)}{\left(\log\sqrt{E}\right)^2}=\frac{E}{4}\cdot\frac{A+o(1)}{\left(\frac{1}{2}\log E\right)^2}=\frac{E}{\log^2 E}\left(A+o(1)\right),$$

而本文的误差项 R_{p-p} 与[2]**上册第** 15 页倒数第 2 行的公式(2.8),(2.9)中的 R 根本不同。本文的 R_{p-p} 只是打开(41) 的[ ]后，跑出来的小数的代数和，而[2] 上册(2.8),(2.9)中的 R 还有别的东西。见[2]**上册第** 16 页第 8 行，第 9 行。

4. 注意到(42)右主项随 E 的单增而单增。现在我们的结论是：对于 $E=2\times 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_v^{\alpha_v}$，这 N_{p-p} 不是随 E，而是随其它任何一个参数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_k$，$p_1,p_2$，$p_3,\dots,p_v$ 之单增而单增，或者说， 各种结构的偶数在自己的结构内，其 N_{p-p} 随自己某参数之单增而单增。这已经接受了计算机的检验。在研究（1+1）命题的过程中，很容易想到， 随偶数之单增，如果奇素数对也单增，似乎可以从单调性上找出一条路来。而，事实上，奇素数对并不随偶数之单增而单增，如，$E=122$ 时 $N_{p-p}=4,$ $E=124$ 时 $N_{p-p}=5,$ $E=126$ 时 $N_{p-p}=8,$ $E=128$ 时 $N_{p-p}=3.$ 看起来，引出 Q,P,S,K，特别是 S，意义重大。

第一空集结构，即 $E=2\times 2^{\alpha_0}$，$\alpha_0\ne 0$ **时，**N_{p-p} **随** α_0 **之增大而增大。** 我们用计算机协助算出了 $E=2\times 2^6$ 至 $E=2\times 2^{31}$ 时 N_{p-p}，N_{c-c}，N_{p-c} 的实际数值，并与本文给出之公式比较，从表 2 左起第三列可清楚地看到，自 $E=2\times 2^{24}$ 起， E 每乘 2，N_{p-p} 愈加接近乘 2. 这是因为随 E 的增大，方根素数或多或少地赶上奇素数对的形势对奇素数对总量之影响已不再明显。

表 1 $E=2\times 2^{\alpha_0}$，$\alpha_0\ne 0$ 时的真实情况

E	q_n	n	N_p	N_c	N_{c-c}	N_{p-p}	N_{p-c}
2×2^6	11	4	30	34	5	3	24
2×2^7	13	5	53	75	19	8	37
2×2^8	19	7	96	160	43	11	74
2×2^9	31	10	171	341	107	22	127
2×2^{10}	43	13	308	716	229	25	258
2×2^{11}	61	17	563	1485	514	53	457
2×2^{12}	89	23	1027	3069	1097	76	875
2×2^{13}	127	30	1899	6293	2348	151	1597
2×2^{14}	181	41	3511	12873	4925	244	3023
2×2^{15}	251	53	6541	26227	10278	435	5671
2×2^{16}	359	71	12250	53286	21267	749	10752
2×2^{17}	509	510	22999	108073	43851	1314	20371

2×2^{18}	719	96	43389	218755	90050	2367	38655
2×2^{19}	1021	171	82024	442264	184359	4239	73546
2×2^{20}	1447	227	155610	892966	376149	7471	140668
2×2^{21}	2039	300	295946	1801206	765705	13075	269796
2×2^{22}	2887	417	564162	3630142	1557908	24918	514326
2×2^{23}	4093	563	1077870	7310738	3162180	45746	986378
2×2^{24}	5791	759	2063688	14713528	6408387	83467	1896754
2×2^{25}	8191	1027	3957818	29596614	12973248	153850	3650118
2×2^{26}	11579	1392	7603552	59505312	26234626	283746	7036060
2×2^{27}	16381	1899	14630842	119586886	53003258	525236	13580370
2×2^{28}	23167	2583	28192749	240242707	107000664	975685	26241379
2×2^{29}	32749	3511	54400027	482470885	215852540	1817111	50765805
2×2^{30}	46337	4790	105097563	968644261	435163387	3390038	98317487
2×2^{31}	65521	6541	203277287	1944206361	876805961	6341424	190594439
2×2^{32}	92681	8951				11891654	
2×2^{33}	131071	12250				22336060	
2×2^{34}	185363	16766				42034097	
2×2^{35}	262139	22999				79287664	

表 2 $E=2\times 2^{\alpha_0}$，$\alpha_0\neq 0$ 时，公式计算 N_{p-p} 与真实情况之比较

E	真实	$\dfrac{\text{本行真实}}{\text{上行真实}}$	$\dfrac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)$	$\dfrac{\text{真实}}{\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)}$	$\left[\dfrac{E}{\ln^2 E}\right]$	$\dfrac{\text{真实}}{\left[\frac{E}{\ln E}\right]}$
2×2^{6}	3		3	1	5	0.5517702581
2×2^{7}	8	2.6666667	6	1.3333333	8	0.9609806027
2×2^{8}	11	1.375	9	1.2222222	13	0.8361008503
2×2^{9}	22	2	15	1.4666666	21	1.0322327208
2×2^{10}	25	1.1363636	27	0.9250259	35	0.7096534995
2×2^{11}	53	2.12	46	1.1521739	59	0.8952190923
2×2^{12}	76	1.4339623	80	0.975	100	0.7136416344
2×2^{13}	151	1.9868421	140	1.0785714	173	0.8678886352
2×2^{14}	244	1.6158940	243	1.0041152	303	0.8049582050
2×2^{15}	435	1.7827869	435	1	532	0.8163947697
2×2^{16}	749	1.7218391	773	0.9689521	943	0.7934519946
2×2^{17}	1314	1.7543391	1379	0.9528644	1684	0.7802816174
2×2^{18}	2367	1.8013699	2492	0.9498395	3022	0.7830445375
2×2^{19}	4239	1.7908745	4502	0.9415815	5456	0.7769166282
2×2^{20}	7471	1.7624440	8199	0.9112087	9897	0.7548112058
2×2^{21}	13705	1.8344264	14940	0.917336	18036	0.7598282196
2×2^{22}	24918	1.8181686	27332	0.9115786	33005	0.7549703142
2×2^{23}	45746	1.8358616	50250	0.9103682	60624	0.7545823370
2×2^{24}	83467	1.8245748	92768	0.8997391	111742	0.7469574308
2×2^{25}	153850	1.8432434	171677	0.8961596	206624	0.7445866260
2×2^{26}	283746	1.8443029	318591	0.8906278	383205	0.7404543953
2×2^{27}	525236	1.8510781	592129	0.8870297	712644	0.7370239342

2×2^{28}	975685	1.8576126	1104308	0.8835262	1328687	0.7343222223
2×2^{29}	1817111	1.8623951	2065494	0.8797464	2483169	0.7317709749
2×2^{30}	3390038	1.8656197	3869035	0.8761973	4651098	0.7288682132
2×2^{31}	6341011	1.8704834	7263389	0.873010	8729894	0.7264559928
2×2^{32}	11891654	1.87535615	13658932	0.87061374	16417652	0.7243212212
2×2^{33}	22336060	1.87829716	25737053	0.86785616	30932220	0.722096884
2×2^{34}	42034097	1.88189398	48581542	0.86522772	58379831	0.720010591
2×2^{35}	79287664	1.88627018	91848699	0.86324210	110363117	0.718425439

第三空集结构，即 $E=2p_1$，无疑，都满足（1+1），因为它们中的每一个 E 只少都可写成一个奇素数对 $E=p_1+p_1$，本不必讨论。 而讨论它，对全面说清（1+1）之根本规律也是很有意义的。此结构奇素数对之个数总的变化趋势仍是随 p_1 之增大而增多，但不是单调的，是“扭着秧歌”的（我们从素数表中连续选取自 61 至 419 共 64 个素数，实查 N_{p-p} 后制成下表及下图，图横坐标左第一个点为素数 61，与之对应的纵坐标为 4，横坐标左第二个点为 67，纵坐标为 6，横坐标左第三个点为 71，纵坐标为 8，横坐标左第四个点为 73，纵坐标为 6，横坐标左第五个点为 79，纵坐标为 5，横坐标左第六个点为 83，纵坐标为 6,⋯，），所以，我们不能从单增函数之理念处理它，这正是（1+1）之特殊性。方根素数或多或少地赶上了生成素数对的机会是“扭秧歌”的根本原因，此原因也导致 N_{c-c} 不十分遵守[ ]， 而当 p_2

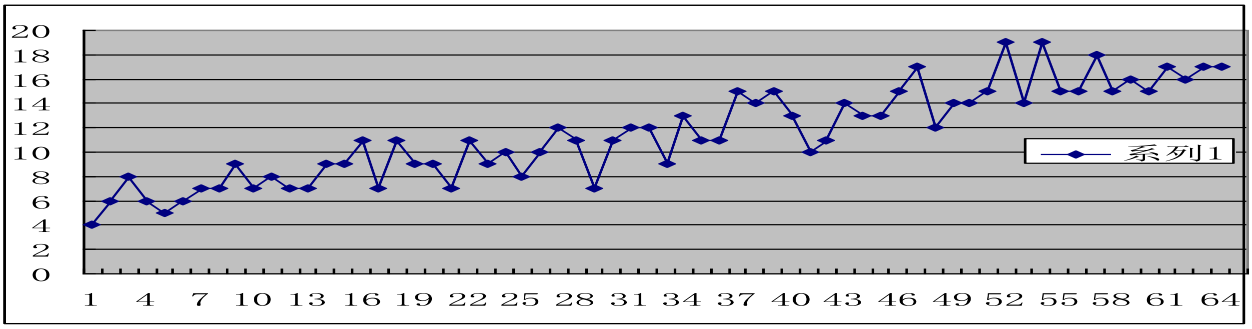
$E=2\times$	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127
$N_{p-p}=$	4	6	8	6	5	6	7	7	9	7	8	7	7	9

131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199
9	11	7	11	9	9	7	11	9	10	8	10	12	11	7

211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283
11	12	12	9	13	11	11	15	14	15	13	10	11	14	13

293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383
13	15	17	12	14	14	15	19	14	19	15	15	18	15	16

389	397	401	409	419
15	17	16	17	17



与 p_1 之 2 倍相近时， $E=2p_2$ 的素数对的个数也接近 $E=2p_1$ 的素数对个数的 2 倍。

表 3 和表 4 是 $E=2p_1$ 与 $E=2\times 2^{\alpha_0}$ 时相关数据的比较和对照。其 61,127,251, 509, 1021, 2039, 4093,8191, 16381,32749, 65521, 131071, 262139, 524287, 1048573, 2097143, 4194301, 8388593, 16777213, 33554393, 67108859, 134217689, 268435399, 53870909, 1073741789, 2147483647, 4294967291, 8589934583, 17179869143, 34359738337 依次分别是 $2^6, 2^7, 2^8, 2^9, \cdots, 2^{35}$ 以内的最大奇素数，所以 2×61, 2×127, $2\times 251, \cdots, 2\times 34359738337$ 依次分别是小于而且最接近 2×2^6, 2×2^7, $2\times 2^8, \cdots, 2\times 2^{35}$ 的具有 $E=2p_1$ 结构的偶数。此比较是说明，不论第三空集还是第一空集，只要 E 的大小相近，它们的 N_{p-p} 及其变化规律就相近，其原因已经说清，即它们都是空集结构，它们都只有 $c\cap c$ 生成，没有 $c\cup c$ 生成。

表 3　$E=2p_1$ 时的真实情况

E	q_n	n	N_p	N_c	N_{c-c}	N_{p-p}	N_{p-c}
2×61	11	4	29	32	5	4	22
2×127	13	5	53	74	19	9	36
2×251	19	7	94	157	46	15	65
2×509	31	10	169	340	105	20	130
2×1021	43	13	308	713	232	30	249
2×2039	61	17	560	1479	510	51	459
2×4093	89	23	1026	3067	1099	79	869
2×8191	127	30	1899	6292	2337	141	1618
2×16381	181	41	3511	12870	4921	242	3028
2×32749	251	53	6539	26210	10236	401	5738
2×65521	359	71	12247	53274	21255	742	10764
2×131071	509	510	22999	108072	43829	1293	20414
2×262139	719	96	43388	218751	90035	2354	38681
2×524287	1021	171	82024	442263	184438	4319	73387
2×1048573	1447	227	155609	892962	376357	7598	140248
2×2097143	2039	300	295944	1801199	766394	13767	268411
2×4194301	2887	417	564162	3630139	1557727	24739	514685
2×8388593	4093	563	1077868	7310730	3162090	45662	986545
2×16777213	5791	759	2063688	14713525	6408608	83690	1896310
2×33554393	8191	1027	3957805	29596588	12973096	153705	3650396
2×67108859	11579	1392	7603552	59505307	26234232	283355	7036843
2×134217689	16381	1899	14630841	119586848	53003345	525343	13580158
2×268435399	23167	2583	28192741	240242658	106999413	974455	26243832
2×536870909	32749	3511	54400027	482470882	215851467	1816040	50767948
2×1073741789	46337	4790	105097559	968644230	435160403	3387068	98323424
2×2147483647	65521	6541	203277287	1944206360	876806378	6341842	190593604
2×4294967291	92681	8951				11892524	
2×8589934583	131071	12250					
2×17179869143	185363	16766					
2×34359738337	262139	22999					

表 4　$E=2p_1$ 时 公式计算与真实情况的比较

E	真实	本行真实/上行真实	$\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)$	真实 / $\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2p^{-1}\right)$	$\left[\frac{E}{\ln E}\right]$	真实 / $\left[\frac{E}{\ln E}\right]$
2×61	4		3	1.3333333	3	0.75
2×127	9	2.25	6	1.5	8	1.125
2×251	15	1.666666667	9	1.666666667	12	1.25
2×509	20	1.333333333	15	1.333333333	21	0.952389523
2×1021	30	1.5	27	1.111111111	35	0.857142857

2×2039	51	1.7	46	1.108695652	59	0.864406779
2×4093	79	1.549016961	80	0.9875	100	0.79
2×8191	141	1.784810127	140	1.007142857	173	0.8150289017
2×16381	242	1.716312056	243	0.99588477	303	0.7986798679
2×32749	401	1.657024793	435	0.92183908	532	0.753759398
2×65521	742	1.85037406	773	0.95989650	943	0.786850477
2×131071	1293	1.74258760	1379	0.937635968	1683	0.7682709447
2×262139	2354	1.82057231	2492	0.944622792	3022	0.7789543348
2×524287	4319	1.83474936	4502	0.959351399	5456	0.7916055718
2×1048571	7681	1.77842093	8199	0.936821563	9897	0.7760937657
2×2097143	13767	1.792344746	14940	0.921485943	18036	0.76330671989
2×4194301	24739	1.79697828	27332	0.905129518	33005	0.7495530980
2×8388593	45662	1.845749626	50250	0.908696514	60624	0.7532000527
2×16777213	83690	1.83438178	92768	0.902142980	111742	0.7489574197
2×33554393	153705	1.836599354	171677	0.895315039	206624	0.7438874477
2×67108859	283355	1.843498910	318591	0.889400516	383205	0.739434506
2×134217689	525343	1.854009987	592129	0.887210388	712644	0.7371745219
2×268435399	974455	1.854892898	1104308	0.882412334	1328687	0.7333969550
2×536870909	1816040	1.863646859	2065494	0.879227923	2483169	0.7313396712
2×1073741789	3387068	1.865084469	3869035	0.875429661	4651098	0.72822976424
2×2147483647	6341842	1.872369258	7263389	0.87307495	8729894	0.72645120318
2×4294967291	11892524	1.8752476	13658932	0.870677443	16417652	0.72437422842
2×8589934583						
2×17179869143						
2×34359738337						

第二空集结构：即 $E=2\times 2^{\alpha_0}\ p_1$，$\alpha_0\neq 0,\quad p_1>\sqrt{2^{\alpha_0+1}}$；看以下几例

$$E=2\times 2^{\alpha_0}\times p_1 \qquad\qquad E=2\,p_1$$

$$E=2\times 2^4\times 73=2336,\quad N_{p-p}=35; \qquad E=2\times 1163=2326,\quad N_{p-p}=35,$$

$$E=2\times 2^5\times 524287=33554368,\quad N_{p-p}=83681, \qquad E=2\times 16777213=33554426,\quad N_{p-p}=83690,$$

$$E=2\times 2^{\alpha_0}=2\times 2^{24}=2^{25}=33554432,\quad N_{p-p}=83467,$$

这说明只要 E 的大小相近，三个空集结构的 N_{p-p} 就相近，原因是它们都只有 $c\cap c$，没有 $c\cup c$。

非空集结构：因为有 $c\cup c$ 生成，在 E 大小相近时，非空集结构之 N_{p-p} 将远大于空集结构，例如：

$$E=2\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4=2\times 3\times 5\times 7\times 11=2310,\quad Q=\{3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\},\quad P=\{3,5,7,11\}$$

$S=Q\cap P=\{3,5,7,11\}$. $K=\{13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$，实查 $N_{p-p}=114$, 按(46)计算 N_{p-p} 之主项，有

$$\left(N_{p-p}\right)_{main}=\left[\frac{E}{4}\prod_{p\in S}\left(1-p^{-1}\right)\prod_{p\in K}\left(1-2\,p^{-1}\right)\right]=\left[\frac{2310}{4}\prod_{3\le p\le 11}\left(1-p^{-1}\right)\prod_{13\le p\le 47}\left(1-2\,p^{-1}\right)\right]=104.$$

$E=2\,p_1=2\times 1163=2326,\quad Q=\{3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$，$P=\{1163\}$, S 为空集，实查 $N_{p-p}=35$, 按(42)计算 N_{p-p} 之主项，有

$$\left(N_{p-p}\right)_{main}=\left[\frac{E}{4}\prod_{p\in Q}\left(1-2\,p^{-1}\right)\right]=\left[\frac{2326}{4}\prod_{3\le p\le 47}\left(1-2\,p^{-1}\right)\right]=29.$$

本定理证毕。

第九章　结语

本书序言中说到，“明摆着，ESRS 是研究（1+1）最好的一张图，为什么从(9+9)走到(1+2)的人不用这张图， 非钻进等差数列？作者曾百思不得其解。现在看来，一是从“同余”得不到(33), 二是不着眼于“系统”就看不出(26).“

数论融入系统论，不是转角度，而是添维度，是旧戏开了新生面。从特殊到一般是人类认识世界，感悟真理的正常渠道。理论要接受实践得的检验。历史是人民创造的。

1979 年，潘承洞就说过，“…,不仅现有的方法不适用于来研究解决（1+1）, 而且到目前为止还看不到可以沿着什么途经，利用什么方法来解决它。”

关于(1+1)，有的人也说了许多话，这些话，根据和逻辑都有错误，也有悖于历史。过分地宣扬(9+9), …, (3+4), …, (1+2)，排斥异己，是不厚道的。 一条错路上的任何一步，都是与终极目标相隔相悖的，准确地说，那也算不得什么成就。精力应当放在寻找新路上。

作者一直认为，（1+1）应当在 Piano 公理系统内解决，否则，既使“解决了”，也大煞风景，不是期待。

若干年来，作者认真读过参考文献中的书籍，坦诚地说，我对这些书中的某些理论和思想方法实在不敢苟同。书中有些段落，公式至今仍深感囧惑。如[2]上册第 12 页至第 30 页，第二章 Brun 的筛法。这个 Brun 筛法，倘若有人真地看懂了，请以 $x=128$为例，用数字取代公式中的所有字母，发在互联网上。一个数学理论，如果无缺陷，又非讹传，应当而且必须能够以实例詮释。

参考文献

[1]华罗庚，数论导引，科学出版社，1979，

[2]闵嗣鹤，数论的方法（上，下册），科学出版社，1981,

[3]潘承洞，潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992，

[4]潘承洞，潘承彪，哥德巴赫猜想，科学出版社，1981，

[5]潘承洞，素数分布与哥德巴赫猜想，山东科学技术出版社，1979，

[6]王元，哥德巴赫猜想研究，黑龙江教育出版社，1987，

[7]维诺格拉陀夫，数论基础，商务印书馆，1954,

[8]A.A.卡拉楚巴，解析数论基础，科学出版社，1984,

[9]哈代，莱特，哈代数论，人民邮电出版社，2009，