（本文原标题为创生集方阵及减 2 黑白布局-证（1+1），2008 年 10 月 5 日发布，2009 年 2 月 17 日修改；2014 年 11 月 11 日再次修改并改标题为从序的角度证哥德巴赫猜想-创生集方阵及减 2 黑白布局，2016 年 6 月 16 日再次修改并改标题为从罗素不等式证哥德巴赫猜想，2017 年 1 月 25 日重发。）(http://www.qptj.com)

从罗素不等式证哥德巴赫猜想
（2017 重发）

王瑞林

镇赉县交通局　吉林镇赉(137300)

chinawrl@126.com

摘要: 本文从罗素不等式，证明了不小于 39602 的偶数皆可表为两个奇素数之和。

关键词：(1+1), 哥德巴赫猜想，罗素不等式.

The proof of the Goldbach conjecture from Rosser inequality

WANG Rui-lin

Communications Bureau of the county of Zhenlai　　Jilin Zhenlai of China (137300)

Email:wangruilin080420@126.com

Abstract: In this paper, from Rosser inequality, we have proved : if $E \geq 39602$ is an even number, then it can be represented as a sum of two prime numbers.

Key Words: (1+1), Goldbach Conjecture, Rosser inequality.

1. 引言

不小于 6 的偶数可表为两个奇素数之和，是哥德巴赫猜想两命题中的一个，另一个可由此推出，常被称作 (1+1).

1979 年有人就已经说过，“不仅现有的方法不适用于来研究解决（1+1），而且到目前为止还看不到可以沿着什么途径，利用什么方法来解决它。” 这“现有的方法”，无非是指筛法，圆法，国内许多书中都可看到。

围绕(1+1)的“工具”，有的人也说了一些话。这些话，根据和逻辑都有错误，也有悖于历史，最终也没能说出来到底什么“工具”管用。

本文用到了罗素（J. B. Rosser）和熊飞尔德（L. Schoenfeld）证明了的关于素数分布的一个重要不等式（下简称罗素不等式 Rossre inequality）$\delta\ln\delta < p_\delta < \delta(\ln\delta + \ln\ln\delta)$（$\delta \geq 6$, p_δ 为素数表中第 δ 个素数），看来，这“工具”早就摆到那里了。

不过，作者仍以为，与“工具”相比，思想方法更重要。

观察(1+1), 可有两个角度，一是“量”，二是“序”。“量”是指偶数E能写成多少个奇素数对，“序”是指距奇数对$E-1,1$ 最近的那个奇素数对距$E-1,1$最远有多远。本文是从“序”的角度证明了(1+1)成立。

2. 偶数的方根素数系统（ESRS）

E表示偶数，q_n为小于$\sqrt{E}$的最大奇素数，为奇素数表中第n个奇素数，小于$\sqrt{E}$的奇素数称为方根素数，用Q表其集合，称方根集，元素从小到大排列，即

$$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,\cdots,q_{n-2},q_{n-1},q_n\}, \tag{1}$$

其中 $q_1=3,\quad q_2=5,\quad q_3=7,\quad q_4=11,\ \cdots.$

这里，我们还令q_n为奇数表中第m个奇数。于是有

$$q_n=2m-1. \tag{2}$$

o,p,c分别表奇数，奇素数，奇合数，且为方便，我们将奇数 1 划入奇合数（不影响本文之论证）。

α_0为非负整数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$为正整数，$v$为正整数，将偶数的唯一分解定理写为

$$E=2\times 2^{\alpha 0}\,p_1^{\alpha 1}\,p_2^{\alpha 2}\,p_3^{\alpha 3}\cdots p_v^{\alpha v}, \tag{3}$$

$p_1<p_2<p_3<\cdots<p_v$ 为奇素数，用p表其集合，即

$$P=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_v\}. \tag{4}$$

集合S表集合P与集合Q之交集，即

$$S=Q\bigcap P. \tag{5}$$

将偶数E包含的奇数序列从中间折回，填加上方根素数的运动足迹，即方根素数 3 从原位跃起，每 3 行一个脚印；方根素数 5 从原位跃起，每 5 行一个脚印； $\cdots$, 方根素数 q_n 从原位跃起，每 q_n 行一个脚印，制成图，称偶数的方根素数系统，简称 ESRS.

系统横称行，纵称列，正中间的纵线称对称线。对称线左右，紧邻对称线的两列奇数分别称为左列奇数和右列奇数。 首行左列奇数为$E-1$, 右列奇数为 1. 同行两列奇数之和为E. 显然，除奇数 1 以外，若某个右列奇数之右边有方根素数之足迹，该奇数为c, 否则为 p; 若某个左列奇数之左边有方根素数之足迹，该奇数为c, 否则为 p. 且显然，除第 1 行外，若某行上没有方根素数之足迹，则该行上的两个奇数即为奇素数对。

用L表系统之行数。L及末行之结构，因E之结构不同而分两种情况：$\alpha_0=0$, 末行左右两列奇数皆为$E/2$,

$$L=E/4+1/2 \tag{6}$$

$\alpha_0\neq 0$, 末行左列奇数为$E/2+1$, 末行右列奇数为 $E/2-1$,

$$L=E/4. \tag{7}$$

因q_n为小于$\sqrt{E}$之最大奇素数，显然有$E\geq q_n^2+1$, 因之有

$$\frac{q_n^2+1}{4}\leq L. \tag{8}$$

将方根素数$3,5,7,11,\cdots$所在之列依次称为第$1,2,3,4,\cdots$列，或$q_1,q_2,q_3,q_4,\cdots$列。

例 1　$E=128=2\times2^{6}$,

				127	1				
		5		125	3				
			3	123	5				
11				121	7				
	7			119	9	3			
			3	117	11				
		5		115	13				
				113	15	3	5		
			3	111	17				
				109	19				
				107	21	3		7	
	7	5	3	105	23				
				103	25		5		
				101	27	3			
11			3	99	29				
				97	31				
		5		95	33	3			11
			3	93	35		5	7	
	7			91	37				
				89	39	3			
			3	87	41				
		5		85	43				
				83	45	3	5		
			3	81	47				
				79	49			7	
11	7			77	51	3			
		5	3	75	53				
				73	55		5		11
				71	57	3			
			3	69	59				
				67	61				
		5		65	63	3		7	

例 2:　$E=124=2\times2^{1}\times31$,

			3	123	1				
11				121	3				
	7			119	5				
			3	117	7				
		5		115	9	3			
				113	11				
			3	111	13				
				109	15	3	5		
				107	17				

	7	5	3	105	19				
				103	21	3		11	
				101	23				
11			3	99	25		5		
				97	27	3			
		5		95	29				
			3	93	31				
	7			91	33	3			11
				89	35		5	7	
			3	87	37				
		5		85	39	3			
				83	41				
			3	81	43				
				79	45	3	5		
11	7			77	47				
		5	3	75	49			7	
				73	51	3			
				71	53				
			3	69	55		5		11
				67	57	3			
		5		65	59				
	7		3	63	61				

例 3: $E = 122 = 2 \times 61$,

11				121	1				
	7			119	3				
			3	117	5				
		5		115	7				
				113	9	3			
			3	111	11				
				109	13				
				107	15	3	5		
	7	5	3	105	17				
				103	19				
				101	21	3		11	
11			3	99	23				
				97	25		5		
		5		95	27	3			
			3	93	29				
	7			91	31				
				89	33	3			11
			3	87	35		5	7	
		5		85	37				
				83	39	3			

			3	81	41				
				79	43				
11	7			77	45	3	5		
		5	3	75	47				
				73	49			7	
				71	51	3			
			3	69	53				
				67	55		5		11
		5		65	57	3			
	7		3	63	59				
				61	61				

例 4:　$E = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$,

		5		125	1				
			3	123	3				
11				121	5				
	7			119	7				
			3	117	9	3			
		5		115	11				
				113	13				
			3	111	15	3	5		
				109	17				
				107	19				
	7	5	3	105	21	3		7	
				103	23				
				101	25		5		
11			3	99	27	3			
				97	29				
		5		95	31				
			3	93	33	3			11
	7			91	35		5	7	
				89	37				
			3	87	39	3			
		5		85	41				
				83	43				
			3	81	45	3	5		
				79	47				
11	7			77	49			7	
		5	3	75	51	3			
				73	53				
				71	55		5		11
			3	69	57	3			
				67	59				
		5		65	61				

	7		3	63	63	3		7	

3. ESRS 之变形

我们以 $E=2\times 2^{6}$ 为例，将 ESRS 做如下变形：

第一步：在脚印旁填加围棋黑子●，且将对称线右侧的●改为▲. 这是因为右侧脚印的位置是确定性的，对任何偶数 E 都不变，例如 3 总是出现在第 $2,\ 3+2,\ 2\times 3+2,\ 3\times 3+2,\ 4\times 3+2,\cdots$ 行，5 总是出现在第 $3,\ 5+3,\ 2\times 5+3,\ 3\times 5+3,\ 4\times 5+3,\cdots$ 行，…，q_i 总是出现在第 $\frac{q_i+1}{2}$，$q_i+\frac{q_i+1}{2}$，$2q_i+\frac{q_i+1}{2}$，$3q_i+\frac{q_i+1}{2}$，$4q_i+\frac{q_i+1}{2},\cdots$ 行，左侧则不然，脚印出现在第几行，因 E 而异。我们给奇数 1 旁加★，且将●, ▲和★统称为黑子。如下图：

$E=128=2\times 2^{6}$

				127	1★				
		5●		125	3				
			3●	123	5				
11●				121	7				
	7●			119	9	3▲			
			3●	117	11				
		5●		115	13				
				113	15	3▲	5▲		
			3●	111	17				
				109	19				
				107	21	3▲		7▲	
	7●	5●	3●	105	23				
				103	25		5▲		
				101	27	3▲			
11●			3●	99	29				
				97	31				
		5●		95	33	3▲			11▲
			3●	93	35		5▲	7▲	
	7●			91	37				
				89	39	3▲			
			3●	87	41				
		5●		85	43				
				83	45	3▲	5▲		
			3●	81	47				
				79	49			7▲	
11●	7●			77	51	3▲			
		5●	3●	75	53				
				73	55		5▲		11▲
				71	57	3▲			

			3●	69	59				
				67	61				
		5●		65	63	3▲		7▲	

第二步：擦去左列奇数，将右列奇数改为行的序号；檫去脚印，即檫去各列中的 3,5,7,11 字样，之后，将对称线右侧q_1列从第 1 行起依次写上 1,2,3; q_2列依次写上 1,2,3,4,5; q_3列依次写上 1,2,3,4,5,6,7; q_4列依次写上 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. 我们将这“1,2,3”,“1,2,3,4,5”,“1,2,3,4,5,6,7”,“1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11”分别称为 q_1, q_2, q_3, q_4 列的数字串。之后，以对称线为轴将左侧翻转重合至右侧。如下图：

$E = 128 = 2 \times 2^6$

					1★	1	1	1	1
					2	2	2●	2	2
					3	3●	3	3	3
					4	1	4	4	4●
					5	2▲	5	5●	5
					6	3●	1	6	6
					7	1	2●	7	7
					8	2▲	3▲	1	8
					9	3●	4	2	9
					10	1	5	3	10
					11	2▲	1	4▲	11
					12	3●	2●	5●	1
					13	1	3▲	6	2
					14	2▲	4	7	3
					15	3●	5	1	4●
					16	1	1	2	5
					17	2▲	2●	3	6▲
					18	3●	3▲	4▲	7
					19	1	4	5●	8
					20	2▲	5	6	9
					21	3●	1	7	10
					22	1	2●	1	11
					23	2▲	3▲	2	1
					24	3●	4	3	2
					25	1	5	4▲	3
					26	2▲	1	5●	4●
					27	3●	2●	6	5
					28	1	3▲	7	6▲
					29	2▲	4	1	7

					30	3●	5	2	8
					31	1	1	3	9
					32	2▲	2	4▲	10

第三步： 在对衬线右侧，没有黑子的位置加上白子○。显然，全为白子○的行就是奇素数对所在的行。第一行有★，不是全为白子○之行。注意，本例每个数字串有两个黑子，▲是右侧原来就有的，●是从左侧翻过来的，本例任一列的两个黑子皆未同行。

					1★	1○	1○	1○	1○
					2	2○	2●	2○	2○
					3	3●	3○	3○	3○
					4	1○	4○	4○	4●
					5	2▲	5○	5●	5○
					6	3●	1○	6○	6○
					7	1○	2●	7○	7○
					8	2▲	3▲	1○	8○
					9	3●	4○	2○	9○
					10	1○	5○	3○	10○
					11	2▲	1○	4▲	11
					12	3●	2●	5●	1○
					13	1○	3▲	6○	2○
					14	2▲	4○	7○	3○
					15	3●	5○	1○	4●
					16	1○	1○	2○	5○
					17	2▲	2●	3○	6▲
					18	3●	3▲	4▲	7○
					19	1○	4○	5●	8○
					20	2▲	5○	6○	9○
					21	3●	1○	7○	10○
					22	1○	2●	1○	11○
					23	2▲	3▲	2○	1○
					24	3●	4○	3○	2○
					25	1○	5○	4▲	3
					26	2▲	1○	5●	4●
					27	3●	2●	6○	5○
					28	1○	3▲	7○	6▲
					29	2▲	4○	1○	7○
					30	3●	5○	2○	8○
					31	1○	1○	3○	9○
					32	2▲	2○	4▲	10○

至此，ESRS 中的 3 个奇素数对（109+19, 97+31, 67+61）变成了 3 个布满〇的行（第 10, 16, 31 行）注意到，**第 1 列每个数字串有 $3-2$ 个〇，第 2 列每个数字串有 $5-2$ 个〇，第 3 列每个数字串有 $7-2$ 个〇，第 4 列每个数字串有 $11-2$ 个〇，由于四列数字串的长度不同，各列的〇早晚要赶到同一行，这就是我们的出发点。我们现在做的，就是研究各列的〇最迟何时会赶到同一行。**

我们按同样的规则对例 4 变形

例 4：$E=126=2\times3^2\times7$

		5●		125	1★				
			3●	123	3				
11●				121	5				
	7●			119	7				
			3●	117	9	3▲			
		5●		115	11				
				113	13				
			3●	111	15	3▲	5▲		
				109	17				
				107	19				
	7●	5●	3●	105	21	3▲		7▲	
				103	23				
				101	25		5▲		
11●			3●	99	27	3▲			
				97	29				
		5●		95	31				
			3●	93	33	3▲			11▲
	7●			91	35		5▲	7▲	
				89	37				
			3●	87	39	3▲			
		5●		85	41				
				83	43				
			3●	81	45	3▲	5▲		
				79	47				
11●	7●			77	49			7▲	
		5●	3●	75	51	3▲			
				73	53				
				71	55		5▲		11▲
			3●	69	57	3▲			
				67	59				
		5●		65	61				
	7●		3●	63	63	3▲		7▲	

例 4：$E=126=2\times3^2\times7$

					1★	1	1●	1	1
					2	2●	2	2	2
					3	3	3	3	3●
					4	1	4	4●	4
					5	2▲●	5	5	5
					6	3	1●	6	6
					7	1	2	7	7
					8	2▲●	3▲	1	8
					9	3	4	2	9
					10	1	5	3	10
					11	2▲●	1●	4▲●	11
					12	3	2	5	1
					13	1	3▲	6	2
					14	2▲●	4	7	3●
					15	3	5	1	4
					16	1	1●	2	5
					17	2▲●	2	3	6▲
					18	3	3▲	4▲●	7
					19	1	4	5	8
					20	2▲●	5	6	9
					21	3	1●	7	10
					22	1	2	1	11
					23	2▲●	3▲	2	1
					24	3	4	3	2
					25	1	5	4▲●	3●
					26	2▲●	1●	5	4
					27	3	2	6	5
					28	1	3▲	7	6▲
					29	2▲●	4	1	7
					30	3	5	2	8
					31	1	1●	3	9
					32	2▲●	2	4▲●	10

例 4： $E=126=2\times 3^2\times 7$

					1★	1○	1●	1○	1○
					2	2●	2○	2○	2○
					3	3○	3○	3○	3●
					4	1○	4○	4●	4○
					5	2▲●	5○	5○	5○
					6	3○	1●	6○	6○

					7	1○	2○	7○	7○
					8	2▲●	3▲	1○	8○
					9	3○	4○	2○	9○
					10	1○	5○	3○	10○
					11	2▲●	1●	4▲●	11○
					12	3○	2○	5○	1○
					13	1○	3▲	6○	2○
					14	2▲●	4○	7○	3●
					15	3○	5○	1○	4○
					16	1○	1●	2○	5○
					17	2▲●	2○	3○	6▲
					18	3○	3▲	4▲●	7○
					19	1○	4○	5○	8○
					20	2▲●	5○	6○	9○
					21	3○	1●	7○	10○
					22	1○	2○	1○	11○
					23	2▲●	3▲	2○	1○
					24	3○	4○	3○	2○
					25	1○	5○	4▲●	3●
					26	2▲●	1●	5○	4○
					27	3○	2○	6○	5○
					28	1○	3▲	7○	6▲
					29	2▲●	4○	1○	7○
					30	3○	5○	2○	8○
					31	1○	1●	3○	9○
					32	2▲●	2○	4▲●	10○

至此，ESRS 中的 10 个奇素数对（113+13, 109+17, 107+19, 103+23, 97+29, 89+37, 83+43, 79+47, 73+53, 67+59）变成了 10 个布满○的行（第 7, 9, 10, 12, 15, 19, 22, 24, 26, 29 行）。与例 1 比较，由于出现▲●之重叠， 本例第 1 列和第 3 列，每个数字串中○的个数分别由例 1 的$3-2$变为$3-1$，$7-2$变为$7-1$；而本例没有出现▲●重叠的第 2 列和第 4 列，每个数字串中○的个数仍与例 1 相同，分别为$5-2$和 $11-2$．▲●重叠，严重地改变奇素数对的数量。

4．偶数结构之分类

根据(1),(3),(4),(5), 偶数之结构可分成两大类.：S 为空集和 S 为非空集合。

定理 1 E 的所有结构中，只有三种结构 S 为空集。第一结构：$E=2\times 2^{\alpha_0}$，$\alpha_0\neq 0$；第二结构：$E=2\times 2^{\alpha_0}\,p_1$，$\alpha_0\neq 0$, $p_1>\sqrt{2^{\alpha_0+1}}$；第三结构：$E=2\,p_1$.

证 只需证三种结构以外，S 不可能为空集。注意到，S 为空集是指 S 的所有元素都大于 $\sqrt{E}$. 且易见，只需证 $E=2\,p_1\,p_2$ 时 S 不是空集即可，而且易见只需证 p_1, p_2 中只少有一

个小于$\sqrt{E}$即可。用反证法， 令$p_1<p_2$，若$p_1>\sqrt{E}$，必有$p_2>\sqrt{E}$，于是有$2p_1p_2>2E$，与$E=2p_1p_2$相悖。本定理证毕。我们将这三种空集结构分别称为第一，第二，第三空集结构。

令N_{p-p}表奇素数对的个数，所举 4 例情况如下：

例 1: $E=128=2\times 2^6$， $E=2\times 2^{\alpha_0}$， $\alpha_0\neq 0$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{\ \}$, $S=Q\cap P=\{\ \}$. 第一空集结构。 $N_{p-p}=3$.

例 2: $E=124=2\times 2^1\times 31$, $E=2\times 2^{\alpha_0}\ p_1$，$\alpha_0\neq 0$, $p_1>\sqrt{2^{\alpha_0+1}}$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{p_1\}=\{31\}$, $S=Q\cap P=\{3,5,7,11\}\cap\{31\}=\{\ \}$. 第二空集结构。 $N_{p-p}=4$.

例 3: $E=122=2\times 61$, $E=2p_1$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{p_1\}=\{61\}$, $S=\{\ \}$. 第三空集结构。$N_{p-p}=4$.

例 4: $E=126=2\times 3^2\times 7$, $Q=\{3,5,7,11\}$, $P=\{p_1,p_2\}=\{3,7\}$, $S=\{3,7\}$. 非空集合结构。$N_{p-p}=10$.

若S 为非空集合，奇素数对剧增。

定理 2 S为空集时，由于没有▲●之重叠，奇素数对最少。所以我们只需研究S为空集之情形，而最具代表性的是第一空集结构 $E=2\times 2^{\alpha_0}$, $\alpha_0\neq 0$; 证毕。我们注意到，第三空集结构对于（1+1）命题，显然为真。

关于（1+1）命题中的单调性 在研究（1+1）命题的过程中，很容易想到，随偶数之单增，如果奇素数对也单增，那似乎可以从单调性上找出一条路来。然而，天不随人愿，奇素数对并不随偶数之单增而单增。这根源就在于偶数之结构。本文提出的偶数唯一分解定理及集合Q,P,S理论，特别是空集理论，为认识偶数之结构开辟了道路。现在可以看到，这单调性存在于任何一类结构的偶数中。 可以这样说，对于 $E=2\times 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_v^{\alpha_v}$，这$N_{p-p}$不随$E$，而是随其它的任一变量 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k,p_1,p_2,p_3,\ldots,p_v$ 之单增而单增。

5. 方根集方阵及减 2 黑白布局

本文将方根集Q之元素做如下图之排列称为方根集方阵，也称Q方阵。引出Q方阵之目的，是为了将变形后的 ESRS 放到一个可以看出规律性的系统中。不久，我们将看到，变形后的 ESRS 是Q方阵的第一域。Q方阵是全局。规律在全局中才能看清楚。现以$q_n=41$为例画出Q方阵之原初图形：

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
1	2	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	8	8	8	8	8	8	8	8	8
3	4	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	5	3	10	10	10	10	10	10	10	10	10

2	1	4	11	11	11	11	11	11	11	11	11
3	2	5	1	12	12	12	12	12	12	12	12
1	3	6	2	13	13	13	13	13	13	13	13
2	4	7	3	1	14	14	14	14	14	14	14
3	5	1	4	2	15	15	15	15	15	15	15
1	1	2	5	3	16	16	16	16	16	16	16
2	2	3	6	4	17	17	17	17	17	17	17
3	3	4	7	5	1	18	18	18	18	18	18
1	4	5	8	6	2	19	19	19	19	19	19
2	5	6	9	7	3	1	20	20	20	20	20
3	1	7	10	8	4	2	21	21	21	21	21
1	2	1	11	9	5	3	22	22	22	22	22
2	3	2	1	10	6	4	23	23	23	23	23
3	4	3	2	11	7	5	1	24	24	24	24
1	5	4	3	12	8	6	2	25	25	25	25
2	1	5	4	13	9	7	3	26	26	26	26
3	2	6	5	1	10	8	4	27	27	27	27
1	3	7	6	2	11	9	5	28	28	28	28
2	4	1	7	3	12	10	6	29	29	29	29
3	5	2	8	4	13	11	7	1	30	30	30
1	1	3	9	5	14	12	8	2	31	31	31
2	2	4	10	6	15	13	9	3	1	32	32
3	3	5	11	7	16	14	10	4	2	33	33
1	4	6	1	8	17	15	11	5	3	34	34
2	5	7	2	9	1	16	12	6	4	35	35
3	1	1	3	10	2	17	13	7	5	36	36
1	2	2	4	11	3	18	14	8	6	37	37
2	3	3	5	12	4	19	15	9	7	1	38
3	4	4	6	13	5	1	16	10	8	2	39
1	5	5	7	1	6	2	17	11	9	3	40
2	1	6	8	2	7	3	18	12	10	4	41
3	2	7	9	3	8	4	19	13	11	5	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	5	7	11	13	17	9	23	29	31	37	41

方阵横称行，纵称列。行数为Q元素之积 $\prod_{i=1}^{n} q_i$， 列数为Q元素之个数n. 方阵的每一列都写满自己的数字串：第 1 列是 1,2,3，第 2 列是 1,2,3,4,5, 第 3 列是 1,2,3,4,5,6,7，第 4 列是 1,2,3,5,6,7,8,9,10.11，⋯，将方阵中不大于$\frac{q_n^2+1}{4}$行之部分称为方阵之第一域，将第$\frac{q_n^2+1}{4}$行称为第一域之边界。

我们有规则地往各列数字串的某些数字旁添加围棋的黑子●，或白子○，使方阵由原初

状态转化成黑子和白子的某种有序分布，称为布局。而且，将●视为障碍物，认为布满○的行是通道。现提出以下问题，并将这些问题统称为“素变数公倍数问题”：

A：每一列的数字串任选两个数字加●，其余加○，问：方阵之第一通道最迟出现在第几行？

B： 每一列的数字串选两个数字加●，一个数字是确定性的，为该数字串的第 $\frac{q_i+1}{2}$ 个数字，i 为该列的序号，另一个任选，其余加○，问：方阵之第一通道最迟出现在第几行？

C：每一列的数字串的所有的数字都加○，问：方阵之第一通道最迟出现在第几行？

D：每一列的数字串的最后一个数字加○，其余加●，问：方阵之第一通道最迟出现在第几行？

E：每一列的数字串任选一个数字加○，其余加●，问：方阵之第一通道最迟出现在第几行？

我们分别用 $HA(q_1 \to q_n)$，$HB(q_1 \to q_n)$，$HC(q_1 \to q_n)$，$HD(q_1 \to q_n)$，$HE(q_1 \to q_n)$ 表示这五个问题的答案。本文主要关注 A，B 问题。

5.1. A 极限布局

按问题 A 所有组合之极限形式，即人为的迫使通道移至下限之形式，在 Q 方阵原初图上加●和○, 称 A 极限布局。

第 1 列（或称 q_1 列）：本列的数字串有 3 个数字，串长为 3 行。我们着眼于第一通道最迟出现的位置，显然，应让过前两行，选择第三行，且将这样的思考方式称为**“第三原则”**。于是，在数字串的数字 1,2 旁加●, 在数字 3 旁加○，这样做，有 $HA(q_1)=3.$

第 2 列（或称 q_2 列）：按第三原则，设障于 q_1 列第一通道（在第 3 行）和第二通道（在第 6 行），在与之对应的数字串的数字 3 及其下面的数字 1 旁加●，其余加○，于是 $q_1 \to q_2$ 第一通道为 q_1 列之第三通道，$HA(q_1 \to q_2)=9.$

第 3 列（或称 q_3 列）：设障于 $q_1 \to q_2$ 第一和第二通道，在与之对应的数字 2 及其下面的数字 5 旁加●，其余加○，于是 $q_1 \to q_3$ 第一通道为 $q_1 \to q_2$ 第三通道，$HA(q_1 \to q_3)=15.$

第 4 列（或称 q_4 列）：设障于 $q_1 \to q_3$ 第一和第二通道，在与之对应的数字 4 及其下面的数字 2 旁加●，其余加○，于是 $q_1 \to q_4$ 第一通道为 $q_1 \to q_3$ 第三通道，$HA(q_1 \to q_4)=27.$

按此操作易得：$HA(q_1 \to q_5)=42,$ $HA(q_1 \to q_6)=60,$ $HA(q_1 \to q_7)=84,$ $HA(q_1 \to q_8)=99,$ $HA(q_1 \to q_9)=120,$ $HA(q_1 \to q_{10})=132,$ $HA(q_1 \to q_{11})=162,$ $HA(q_1 \to q_{12})=192.$

A 极限布局

1	1●	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2●	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3○	3●	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1●	4○	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	2●	5○	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	3○	1●	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1●	2○	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

8	2●	3●	1	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	3○	4○	2●	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	1●	5○	3○	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	2●	1●	4○	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	3○	2○	5●	1	12	12	12	12	12	12	12	12
13	1●	3●	6○	2	13	13	13	13	13	13	13	13
14	2●	4○	7○	3	1	14	14	14	14	14	14	14
15	3○	5○	1○	4●	2	15	15	15	15	15	15	15
16	1●	1●	2●	5○	3	16	16	16	16	16	16	16
17	2●	2○	3○	6○	4	17	17	17	17	17	17	17
18	3○	3●	4○	7○	5	1	18	18	18	18	18	18
19	1●	4○	5●	8○	5	2	19	19	19	19	19	19
20	2●	5○	6○	9○	7	3	1	20	20	20	20	20
21	3○	1●	7○	10○	8	4	2	21	21	21	21	21
22	1●	2○	1○	11○	9	5	3	22	22	22	22	22
23	2●	3●	2●	1○	10	6	4	23	23	23	23	23
24	3○	4○	3○	2●	11	7	5	1	24	24	24	24
25	1●	5○	4○	3○	12	8	6	2	25	25	25	25
26	2●	1●	5●	4●	13	9	7	3	26	26	26	26
27	3○	2○	6○	5○	1●	10	8	4	27	27	27	27
28	1●	3●	7○	6○	2○	11	9	5	28	28	28	28
29	2●	4○	1○	7○	3○	12	10	6	29	29	29	29
30	3○	5○	2●	8○	4○	13	11	7	1	30	30	30
31	1●	1●	3○	9○	5○	14	12	8	2	31	31	31
32	2●	2○	4○	10○	6○	15	13	9	3	1	32	32
33	3○	3●	5●	11○	7○	16	14	10	4	2	33	33
34	1●	4○	6○	1○	8○	17	15	11	5	3	34	34
35	2●	5○	7○	2●	9○	1	16	12	6	4	35	35
36	3○	1●	1○	3○	10○	2	17	13	7	5	36	36
37	1●	2○	2●	4●	11○	3	18	14	8	6	37	37
38	2●	3●	3○	5○	12○	4	19	15	9	7	1	38
39	3○	4○	4○	6○	13●	5	1	16	10	8	2	39
40	1●	5○	5○	7○	1●	6	2	17	11	9	3	40
41	2●	1●	5●	8○	2○	7	3	18	12	10	4	41
42	3○	2○	7○	9○	3○	8●	4	19	13	11	5	1
43	1●	3●	1○	10○	4○	9○	5	20	14	12	6	2
44	2●	4○	2●	11○	5○	10○	6	21	15	13	7	3
45	3○	5○	3○	1○	6○	11●	7	22	16	14	8	4
46	1●	1●	4○	2●	7○	12○	8	23	17	15	9	5

47	2●	2○	5●	3○	8○	13○	9	1	18	16	10	6
48	3○	3●	6○	4●	9○	14○	10	2	19	17	11	7
49	1●	4○	7○	5○	10○	15○	11	3	20	18	12	8
50	2●	5○	1○	6○	11○	16○	12	4	21	19	13	9
51	3○	1●	2●	7○	12○	17○	13	5	22	20	14	10
52	1●	2○	3○	8○	13●	1○	14	6	23	21	15	11
53	2●	3●	4○	9○	1●	2○	15	7	24	22	16	12
54	3○	4○	5●	10○	2○	3○	16	8	25	23	17	13
55	1●	5○	6○	11○	3○	4○	17	9	26	24	18	14
56	2●	1●	7○	1○	4○	5○	18	10	27	25	19	15
57	3○	2○	1○	2●	5○	6○	19	11	28	26	20	16
58	1●	3●	2●	3○	6○	7○	1	12	29	27	21	17
59	2●	4○	3○	4●	7○	8●	2	13	1	28	22	18
60	3○	5○	4○	5○	8○	9○	3●	14	2	29	23	19
61	1●	1●	5●	6○	9○	10○	4○	15	3	30	24	20
62	2●	2○	6○	7○	10○	11●	5○	16	4	31	25	21
63	3○	3●	7○	8○	11○	12○	6○	17	5	1	26	22
64	1●	4○	1○	9○	12○	13○	7○	18	6	2	27	23
65	2●	5○	2●	10○	13●	14○	8○	19	7	3	28	24
66	3○	1●	3○	11○	1●	15○	9○	20	8	4	29	25
67	1●	2○	4○	1○	2○	16○	10○	21	9	5	30	26
68	2●	3●	5●	2●	3○	17○	11○	22	10	6	31	27
69	3○	4○	6○	3○	4○	1○	12●	23	11	7	32	28
70	1●	5○	7○	4●	5○	2○	13○	1	12	8	33	29
71	2●	1●	1○	5○	6○	3○	14○	2	13	9	34	30
72	3○	2○	2●	6○	7○	4○	15○	3	14	10	35	31
73	1●	3●	3○	7○	8○	5○	16○	4	15	11	36	32
74	2●	4○	4○	8○	9○	6○	17○	5	16	12	37	33
75	3○	5○	5●	9○	10○	7○	18○	6	17	13	1	34
76	1●	1●	6○	10○	11○	8●	19○	7	18	14	2	35
77	2●	2○	7○	11○	12○	9○	1○	8	19	15	3	36
78	3○	3●	1○	1○	13●	10○	2○	9	20	16	4	37
79	1●	4○	2●	2●	1●	11●	3●	10	21	17	5	38
80	2●	5○	3○	3○	2○	12○	4○	11	22	18	6	39
81	3○	1●	4○	4●	3○	13○	5○	12	23	19	7	40
82	1●	2○	5●	5○	4○	14○	6○	13	24	20	8	41
83	2●	3●	6○	6○	5○	15○	7○	14	25	21	9	1
84	3○	4○	7○	7○	6○	16○	8○	15●	26	22	10	2
85	1●	5○	1○	8○	7○	17○	9○	16○	27	23	11	3

86	2●	1●	2●	9○	8○	1○	10○	17○	28	24	12	4
87	3○	2○	3○	10○	9○	2○	11○	18●	29	25	13	5
88	1●	3●	4○	11○	10○	3○	12●	19○	1	26	14	6
89	2●	4○	5●	1○	11○	4○	13○	20○	2	27	15	7
90	3○	5○	6○	2●	12○	5○	14○	21○	3	28	16	8
91	1●	1●	7○	3○	13●	6○	15○	22○	4	29	17	9
92	2●	2○	1○	4●	1●	7○	16○	23○	5	30	18	10
93	3○	3●	2●	5○	2○	8●	17○	1○	6	31	19	11
94	1●	4○	3○	6○	3○	9○	18○	2○	7	1	20	12
95	2●	5○	4○	7○	4○	10○	19○	3○	8	2	21	13
96	3○	1●	5●	8○	5○	11●	1○	4○	9	3	22	14
97	1●	2○	6○	9○	6○	12○	2○	5○	10	4	23	15
98	2●	3●	7○	10○	7○	13○	3●	6○	11	5	24	16
99	3○	4○	1○	11○	8○	14○	4○	7○	12●	6	25	17
100	1●	5○	2●	1○	9○	15○	5○	8○	13○	7	26	18
101	2●	1●	3○	2●	10○	16○	6○	9○	14○	8	27	19
102	3○	2○	4○	3○	11○	17○	7○	10○	15●	9	28	20
103	1●	3●	5●	4●	12○	1○	8○	11○	16○	10	29	21
104	2●	4○	6○	5○	13●	2○	9○	12○	17○	11	30	22
105	3○	5○	7○	6○	1●	3○	10○	13○	18○	12	31	23
106	1●	1●	1○	7○	2○	4○	11○	14○	19○	13	32	24
107	2●	2○	2●	8○	3○	5○	12●	15●	20○	14	33	25
108	3○	3●	3○	9○	4○	6○	13○	16○	21○	15	34	26
109	1●	4○	4○	10○	5○	7○	14○	17○	22○	16	35	27
110	2●	5○	5●	11○	6○	8●	15○	18●	23○	17	36	28
111	3○	1●	6○	1○	7○	9○	16○	19○	24○	18	37	29
112	1●	2○	7○	2●	8○	10○	17○	20○	25○	19	1	30
113	2●	3●	1○	3○	9○	11●	18○	21○	26○	20	2	31
114	3○	4○	2●	4●	10○	12○	19○	22○	27○	21	3	32
115	1●	5○	3○	5○	11○	13○	1○	23○	28○	22	4	33
116	2●	1●	4○	6○	12○	14○	2○	1○	29○	23	5	34
117	3○	2○	5●	7○	13●	15○	3●	2○	1○	24	6	35
118	1●	3●	6○	8○	1●	16○	4○	3○	2○	25	7	36
119	2●	4○	7○	9○	2○	17○	5○	4○	3○	26	8	37
120	3○	5○	1○	10○	3○	1○	6○	5○	4○	27●	9	38
121	1●	1●	2●	11○	4○	2○	7○	6○	5○	28○	10	39
122	2●	2○	3○	1○	5○	3○	8○	7○	6○	29○	11	40
123	3○	3●	4○	2●	6○	4○	9○	8○	7○	30○	12	41
124	1●	4○	5●	3○	7○	5○	10○	9○	8○	31○	13	1

125	2●	5○	6○	4●	8○	6○	11○	10○	9○	1○	14	2
126	3○	1●	7○	5○	9○	7○	12●	11○	10○	2○	15	3
127	1●	2○	1○	6○	10○	8●	13○	12○	11○	3○	16	4
128	2●	3●	2●	7○	11○	9○	14○	13○	12●	4○	17	5
129	3○	4○	3○	8○	12○	10○	15○	14○	13○	5●	18	6
130	1●	5○	4○	9○	13●	11●	16○	15●	14○	6○	19	7
131	2●	1●	5●	10○	1●	12○	17○	16○	15●	7○	20	8
132	3○	2○	6○	11○	2○	13○	18○	17○	16○	8○	21●	9
133	1●	3●	7○	1○	3○	14○	19○	18●	17○	9○	22○	10
134	2●	4○	1○	2●	4○	15○	1○	19○	18○	10○	23○	11
135	3○	5○	2●	3○	5○	16○	2○	20○	19○	11○	24○	12
136	1●	1●	3○	4●	6○	17○	3●	21○	20○	12○	25○	13
137	2●	2○	4○	5○	7○	1○	4○	22○	21○	13○	26○	14
138	3○	3●	5●	6○	8○	2○	5○	23○	22○	14○	27○	15
139	1●	4○	6○	7○	9○	3○	6○	1○	23○	15○	28○	16
140	2●	5○	7○	8○	10○	4○	7○	2○	24○	16○	29○	17
141	3○	1●	1○	9○	11○	5○	8○	3○	25○	17○	30○	18
142	1●	2○	2●	10○	12○	6○	9○	4○	26○	18○	31○	19
143	2●	3●	3○	11○	13●	7○	10○	5○	27○	19○	32○	20
144	3○	4○	4○	1○	1●	8●	11○	6○	28○	20○	33○	21
145	1●	5○	5●	2●	2○	9○	12●	7○	29○	21○	34○	22
146	2●	1●	6○	3○	3○	10○	13○	8○	1○	22○	35○	23
147	3○	2○	7○	4●	4○	11●	14○	9○	2○	23○	36○	24
148	1●	3●	1○	5○	5○	12○	15○	10○	3○	24○	37○	25
149	2●	4○	2●	6○	6○	13○	16○	11○	4○	25○	1○	26
150	3○	5○	3○	7○	7○	14○	17○	12○	5○	26○	2●	27
151	1●	1●	4○	8○	8○	15○	18○	13○	6○	27●	3○	28
152	2●	2○	5●	9○	9○	16○	19○	14○	7○	28○	4○	29
153	3○	3●	6○	10○	10○	17○	1○	15●	8○	29○	5○	30
154	1●	4○	7○	11○	11○	1○	2○	16○	9○	30○	6○	31
155	2●	5○	1○	1○	12○	2○	3●	17○	10○	31○	7○	32
156	3○	1●	2●	2●	13●	3○	4○	18●	11○	1○	8○	33
157	1●	2○	3○	3○	1●	4○	5○	19○	12●	2○	9○	34
158	2●	3●	4○	4●	2○	5○	6○	21○	13○	3○	10○	35
159	3○	4○	5●	5○	3○	6○	7○	21○	14○	4○	11○	36
160	1●	5○	6○	6○	4○	7○	8○	22○	15●	5●	12○	37
161	2●	1●	7○	7○	5○	8●	9○	23○	16○	6○	13○	38
162	3○	2○	1○	8○	6○	9○	10○	1○	17○	7○	14○	39●
163	1●	3●	2●	9○	7○	10○	11○	2○	18○	8○	15○	40○

164	2●	4○	3○	10○	8○	11●	12●	3○	19○	9○	16○	41○
165	3○	5○	4○	11○	9○	12○	13○	4○	20○	10○	17○	1●
166	1●	1●	5●	1○	10○	13○	14○	5○	21○	11○	18○	2○
167	2●	2○	6○	2●	11○	14○	15○	6○	22○	12○	19○	3○
168	3○	3●	7○	3○	12○	15○	16○	7○	23○	13○	20○	4○
169	1●	4○	1○	4●	13●	16○	17○	8○	24○	14○	21●	5○
170	2●	5○	2●	5○	1●	17○	18○	9○	25○	15○	22○	6○
171	3○	1●	3○	6○	2○	1○	19○	10○	26○	16○	23○	7○
172	1●	2○	4○	7○	3○	2○	1○	11○	27○	17○	24○	8○
173	2●	3●	5●	8○	4○	3○	2○	12○	28○	18○	25○	9○
174	3○	4○	6○	9○	5○	4○	3●	13○	29○	19○	26○	10○
175	1●	5○	7○	10○	6○	5○	4○	14○	1○	20○	27○	11○
176	2●	1●	1○	11○	7○	6○	5○	15●	2○	21○	28○	12○
177	3○	2○	2●	1○	8○	7○	6○	16○	3○	22○	29○	13○
178	1●	3●	3○	2●	9○	8●	7○	17○	4○	23○	30○	14○
179	2●	4○	4○	3○	10○	9○	8○	18●	5○	24○	31○	15○
180	3○	5○	5●	4●	11○	10○	9○	19○	6○	25○	32○	16○
181	1●	1●	6○	5○	12○	11●	10○	20○	7○	26○	33○	17○
182	2●	2○	7○	6○	13●	12○	11○	21○	8○	27●	34○	18○
183	3○	3●	1○	7○	1●	13○	12●	22○	9○	28○	35○	19○
184	1●	4○	2●	8○	2○	14○	13○	23○	10○	29○	36○	20○
185	2●	5○	3○	9○	3○	15○	14○	1○	11○	30○	37○	21○
186	3○	1●	4○	10○	4○	16○	15○	2○	12●	31○	1○	22○
187	1●	2○	5●	11○	5○	17○	16○	3○	13○	1○	2●	23○
188	2●	3●	6○	1○	6○	1○	17○	4○	14○	2○	3○	24○
189	3○	4○	7○	2●	7○	2○	18○	5○	15●	3○	4○	25○
190	1●	5○	1○	3○	8○	3○	19○	6○	16○	4○	5○	26○
191	2●	1●	2●	4●	9○	4○	1○	7○	17○	5●	6○	27○
192	3○	2○	3○	5○	10○	5○	2○	8○	18○	6○	7○	28○
193	1●	3●	4○	6○	11○	6○	3●	9○	19○	7○	8○	29○
194	2●	4○	5●	7○	12○	7○	4○	10○	20○	8○	9○	30○
195	3○	5○	6○	8○	13●	8●	5○	11○	21○	9○	10○	31○
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

定理 3　q_n 为小于 $\sqrt{E}$ 的最大奇素数，为奇素数表中第 n 个奇素数，$HA(q_1 \to q_n)$ 为 Q 方阵 A 极限布局 $q_1 \to q_n$ 第一通道最迟可能出现之行位，有

$$HA(q_1 \to q_n) < 1 + 2n^2 . \tag{9}$$

证 第一，用乘法：我们考虑的是第一通道最迟出现的位置，所以，对于q_1列，按“第三原则”，让过前两行（用黑子堵上前两行），选择第三行，有

$$HA(q_1)=2+1=3. \tag{10}$$

通道进入到q_2列时， 按“第三原则”，堵上q_1列之第一和第二通道，即堵上2个○行，所以$HA(q_1\to q_2)$要由$HA(q_1)$下移2个○行. 注意到q_1列的数字串有3个数字，一个数字串占3行，●的个数为2, ○的个数为$3-2$． 我们用$\frac{2}{3-2}$表示q_1列每下移$3-2$个○行，就得同时下移2个●行。显然，要下移2个○行，就得同时下移$2\times\frac{2}{3-2}$个●行．于是有

$$HA(q_1\to q_2)=HA(q_1)+2+2\times\frac{2}{3-2}=H(q_1)+2\left(1+\frac{2}{3-2}\right)=3+2\times 3. \tag{11}$$

（再说一次，上式 $2+2\times\frac{2}{3-2}$中左数第一个2是下移2个○行，$2\times\frac{2}{3-2}$是下移2个○行的同时下移的●行数。$\times\left(1+\frac{2}{3-2}\right)$应理解为$q_1$列的●○结构对下移总量的约制）

当通道进入q_3列时，按“第三原则”，要堵上$q_1\to q_2$第一和第二通道，即要堵上2个全○行（即q_1列和q_2列都为○的行），亦即$H(q_1\to q_3)$要由$H(q_1\to q_2)$下移2个全○行。显然，这次下移的总行数不只受q_1列●○结构的约制，还要受q_2列●○结构的约制，q_2列的数字串有5个数字，一个数字串占5行，●的个数为2, ○的个数为 $5-2$，每下移$5-2$个○行, 就得同时下移2个●行，为简捷和更安全，我们不去计较q_1列的●与q_2列的●的重叠，这使推理更加严紧，我们用$\times\left(1+\frac{2}{5-2}\right)$表示$q_2$列的●○结构对下移总量的约制，有

$$HA(q_1\to q_3)\le HA(q_1\to q_2)+2\left(1+\frac{2}{3-2}\right)\left(1+\frac{2}{5-2}\right)=3+2\times 3+2\times 3\times\frac{5}{3}. \tag{12}$$

（注意，(12)使用了“$\le$”，是因为“我们不去计较q_1列的●与q_2列的●的重叠，这使推理更加严紧”。） 以此类推，有

$$HA(q_1\to q_4)\le HA(q_1\to q_3)+2\left(1+\frac{2}{3-2}\right)\left(1+\frac{2}{5-2}\right)\left(1+\frac{2}{7-2}\right)$$
$$=3+2\times 3+2\times 3\times\frac{5}{3}+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}, \tag{13}$$

$$HA(q_1\to q_5)\le HA(q_1\to q_4)+2\left(1+\frac{2}{3-2}\right).\left(1+\frac{2}{5-2}\right)\left(1+\frac{2}{7-2}\right)\left(1+\frac{2}{11-2}\right)$$
$$=3+2\times 3+2\times 3\times\frac{5}{3}+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{11}{9}, \tag{14}$$

…

$$HA(q_1\to q_n)\le HA(q_1\to q_{n-1})+2\left(1+\frac{2}{3-2}\right)\left(1+\frac{2}{5-2}\right)\left(1+\frac{2}{7-2}\right)\left(1+\frac{2}{11-2}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{q_{n-1}-2}\right)$$
$$=3+2\times 3+2\times 3\times\frac{5}{3}+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{11}{9}+\ldots+2\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{11}{9}\times\ldots\times\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}-2} \tag{15}$$

注意到 $x>3$时，$\dfrac{x}{x-2}$ 随 x 之增大而减小，例如 $\dfrac{9}{7}>\dfrac{11}{9}>\dfrac{13}{11}>\dfrac{15}{13},\cdots$，且注意 q_n 为奇素数表中第 n 个奇素数，有 $q_n\geq 2n+1,\quad q_{n-1}\geq 2n-1,$ 于是有 $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-1}-2}\leq\dfrac{2n-1}{2n-3}$，不难看出，用奇数序列取代(15)中的奇素数序列，不等式更成立，亦即有

$$HA(q_1\to q_n)<1+2\left\langle 1+3+3\times\frac{5}{3}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}+\cdots+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}\right\rangle, \quad (16)$$

$$HA(q_1\to q_n)<1+2\langle 1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)\rangle=1+2\times\frac{n(1+2n-1)}{2}=1+2\,n^2. \quad (17)$$

第二，用加法：注意到 q_1 列每 3 行为 1 个循环，1 个循环内有 $3-2$ 条通道，$q_1\to q_2$ 每 3×5 行为一个循环，一个循环内有 $(3-2)(5-2)$ 条通道，$q_1\to q_3$ 每 $3\times 5\times 7$ 行为一个循环，一个循环内有 $(3-2)(5-2)(7-2)$ 条通道，---，$q_1\to q_n$ 每 $3\times 5\times 7\times 11\times\cdots\times q_n$ 行为一个循环，一个循环内有 $(3-2)(5-2)(7-2)(11-2)\cdots(q_n-2)$ 条通道。我们用 ξA 表示一个循环的行数，μA 表示一个循环内通道的条数，$\bar{\nu}A$ 表示通道之平均间距，有

$$\xi A(q_1\to q_i)=q_1 q_2\cdots q_i, \quad (18)$$

$$\mu A(q_1\to q_i)=(q_1-2)(q_2-2)\cdots(q_i-2), \quad (19)$$

$$\bar{\nu}A(q_1\to q_i)=\frac{\xi A(q_1\to q_i)}{\mu A(q_1\to q_i)}=\frac{q_1}{q_1-2}\cdot\frac{q_2}{q_2-2}\cdot\frac{q_3}{q_3-2}\cdot\cdots\cdot\frac{q_i}{q_i-2}. \quad (20)$$

我们考虑的是第一通道最迟出现之行位，按“第三原则”，q_1 列第一通道应让过前两行，选在第三行，即

$$HA(q_1)=2+1=1+2. \quad (21)$$

按“第三原则”，$q_1\to q_2$ 第一通道应为 q_1 列第三通道，我们用 **q_1 列第一通道行位加 2 倍 q_1 列通道平均间距**计算，有

$$HA(q_1\to q_2)=HA(q_1)+2\bar{\nu}A(q_1)=1+2+2\times\frac{3}{3-2}. \quad (22)$$

按“第三原则”，$q_1\to q_3$ 第一通道应为 $q_1\to q_2$ 第三通道，我们用 **$q_1\to q_2$ 第一通道行位加 2 倍 $q_1\to q_2$ 通道平均间距**计算，有

$$HA(q_1\to q_3)=HA(q_1\to q_2)+2\bar{\nu}A(q_1\to q_2)=1+2+2\times\frac{3}{3-2}+2\times\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}. \quad (23)$$

按“第三原则”$q_1\to q_4$ 第一通道应为 $q_1\to q_3$ 第三通道，我们用 $q_1\to q_3$ 第一通道行位加 2 倍 $q_1\to q_3$ 通道平均间距计算，有

$$HA(q_1\to q_4)=HA(q_1\to q_3)+2\bar{\nu}A(q_1\to q_3)$$
$$=1+2+2\times\frac{3}{3-2}+2\times\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}+2\times\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}\times\frac{7}{7-2}. \quad (24)$$

至此，按“第三原则”，使用**前列通道行位加 2 倍前列通道平均间距**之计算方法，有

$$HA(q_1\to q_n)=1+2+2\langle\bar{\nu}A(q_1)+\bar{\nu}A(q_1\to q_2)+\bar{\nu}A(q_1\to q_3)+\bar{\nu}A(q_1\to q_4)+\cdots+\bar{\nu}A(q_1\to q_{n-1})\rangle$$
$$=1+2\left\langle 1+\frac{3}{3-2}+\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}+\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}\times\frac{7}{7-2}+\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}\times\frac{7}{7-2}\times\frac{11}{11-2}+\cdots\right.$$

$$+\frac{3}{3-2}\times\frac{5}{5-2}\times\frac{7}{7-2}\times\frac{11}{11-2}\times\cdots\times\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}-2}\Big\rangle$$

$$=1+2\Big\langle 1+3+3\times\frac{5}{3}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{11}{9}+\cdots+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{11}{9}\times\cdots\times\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}-2}\Big\rangle. \qquad (25)$$

显然，(25)与(15)相同，因之有

$$HA(q_1\to q_n)<1+2\Big\langle 1+3+3\times\frac{5}{3}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}+\cdots+3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}\Big\rangle, \quad (26)$$

$$HA(q_1\to q_n)<1+2\langle 1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)\rangle=1+2\times\frac{n(1+2n-1)}{2}=1+2n^2. \qquad (27)$$

本定理证毕。易见 (27)中$1+2n^2$里的 2 是“**加 2 倍前列通道平均间距**”里的 **2**.

5.2. B 极限布局

按问题 B 所有组合之极限形式在Q方阵原初图上加●和〇，且将确定性数字旁的●换成▲，称 B 极限布局。.

第 1 列，我们着眼于第一通道最迟出现的位置，按“第三原则”，选择第 3 行。注意到 $\frac{q_i+1}{2}=\frac{3+1}{2}=2,$ 所以在数字 2 旁加▲，在数字 1 旁加●，其余加〇，$HB(q_1)=3,$

第 2 列，按“第三原则”，应设障于q_1列的第一通道和第二通道。而另一方面，我们注意到$\frac{q_i+1}{2}=\frac{5+1}{2}=3,$ 即本列确定性数字为 3, 所以应在数字 3 旁加▲。侥倖，这个▲恰好堵上了q_1列的第一通道。我们用●去堵第二通道，于是 $HB(q_1\to q_2)=9.$

第 3 列，按“第三原则”，应设障于$q_1\to q_2$之第一和第二通道。而另一方面，我们注意到$\frac{q_i+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4,$ 本列确定性数字为 4, 应在数字 4 旁加▲。不侥倖，这个▲未堵上$q_1\to q_2$之第一或第二通道。我们只能派●去堵$q_1\to q_2$之第一通道。于是$HB(q_1\to q_3)=12.$

第 4 列，按“第三原则”，应设障于$q_1\to q_3$之第一和第二通道。而另一方面，我们注意到$\frac{q_i+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6,$ 本列确定性数字为6, 在数字6旁加▲。又不侥倖，这个▲未堵上$q_1\to q_3$之第一或第二通道。我们只能派●去堵$q_1\to q_3$之第一通道。于是 $HB(q_1\to q_4)=15.$

按此操作易得：$HB(q_1\to q_5)=24,$ $HB(q_1\to q_6)=27,$ $HB(q_1\to q_7)=42,$ $HB(q_1\to q_8)=57,$ $HB(q_1\to q_9)=69,$ $HB(q_1\to q_{10})=90,$ $HB(q_1\to q_{11})=99,$ $HB(q_1\to q_{12})=117.$

B 极限布局

1	1●	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2▲	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3〇	3▲	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1●	4〇	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	2▲	5〇	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	3〇	1●	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1●	2〇	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

8	2▲	3▲	1	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	3○	4○	2●	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	1●	5○	3○	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	2▲	1●	4▲	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	3○	2○	5○	1●	12	12	12	12	12	12	12	12
13	1●	3▲	6○	2○	13	13	13	13	13	13	13	13
14	2▲	4○	7○	3○	1	14	14	14	14	14	14	14
15	3○	5○	1○	4○	2●	15	15	15	15	15	15	15
16	1●	1●	2●	5○	3○	16	16	16	16	16	16	16
17	2▲	2○	3○	6▲	4○	17	17	17	17	17	17	17
18	3○	3▲	4▲	7○	5○	1	18	18	18	18	18	18
19	1●	4○	5○	8○	5○	2	19	19	19	19	19	19
20	2▲	5○	6○	9○	7▲	3	1	20	20	20	20	20
21	3○	1●	7○	10○	8○	4	2	21	21	21	21	21
22	1●	2○	1○	11○	9○	5	3	22	22	22	22	22
23	2▲	3▲	2●	1●	10○	6	4	23	23	23	23	23
24	3○	4○	3○	2○	11○	7●	5	1	24	24	24	24
25	1●	5○	4▲	3○	12○	8○	6	2	25	25	25	25
26	2▲	1●	5○	4○	13○	9▲	7	3	26	26	26	26
27	3○	2○	6○	5○	1○	10○	8●	4	27	27	27	27
28	1●	3▲	7○	6▲	2●	11○	9○	5	28	28	28	28
29	2▲	4○	1○	7○	3○	12○	10▲	6	29	29	29	29
30	3○	5○	2●	8○	4○	13○	11○	7	1	30	30	30
31	1●	1●	3○	9○	5○	14○	12○	8	2	31	31	31
32	2▲	2○	4▲	10○	6○	15○	13○	9	3	1	32	32
33	3○	3▲	5○	11○	7▲	16○	14○	10	4	2	33	33
34	1●	4○	6○	1●	8○	17○	15○	11	5	3	34	34
35	2▲	5○	7○	2○	9○	1○	16○	12	6	4	35	35
36	3○	1●	1○	3○	10○	2○	17○	13	7	5	36	36
37	1●	2○	2●	4○	11○	3○	18○	14	8	6	37	37
38	2▲	3▲	3○	5○	12○	4○	19	15	9	7	1	38
39	3○	4○	4▲	6▲	13○	5○	1○	16	10	8	2	39
40	1●	5○	5○	7○	1○	6○	2○	17	11	9	3	40
41	2▲	1●	5○	8○	2●	7●	3○	18	12	10	4	41
42	3○	2○	7○	9○	3○	8○	4○	19●	13	11	5	1
43	1●	3▲	1○	10○	4○	9▲	5○	20○	14	12	6	2
44	2▲	4○	2●	11○	5○	10○	6○	21○	15	13	7	3
45	3○	5○	3○	1●	6○	11○	7○	22○	16	14	8	4
46	1●	1●	4▲	2○	7▲	12○	8●	23○	17	15	9	5

47	2▲	2○	5○	3○	8○	13○	9○	1○	18	16	10	6
48	3○	3▲	6○	4○	9○	14○	10▲	2○	19	17	11	7
49	1●	4○	7○	5○	10○	15○	11○	3○	20	18	12	8
50	2▲	5○	1○	6▲	11○	16○	12○	4○	21	19	13	9
51	3○	1●	2●	7○	12○	17○	13○	5○	22	20	14	10
52	1●	2○	3○	8○	13○	1○	14○	6○	23	21	15	11
53	2▲	3▲	4▲	9○	1○	2○	15○	7○	24	22	16	12
54	3○	4○	5○	10○	2●	3○	16○	8○	25	23	17	13
55	1●	5○	6○	11○	3○	4○	17○	9○	26	24	18	14
56	2▲	1●	7○	1●	4○	5○	18○	10○	27	25	19	15
57	3○	2○	1○	2○	5○	6○	19○	11○	28●	26	20	16
58	1●	3▲	2●	3○	6○	7●	1○	12▲	29○	27	21	17
59	2▲	4○	3○	4○	7▲	8○	2○	13○	1○	28	22	18
60	3○	5○	4▲	5○	8○	9▲	3○	14○	2○	29	23	19
61	1●	1●	5○	6▲	9○	10○	4○	15○	3○	30	24	20
62	2▲	2○	6○	7○	10○	11○	5○	16○	4○	31	25	21
63	3○	3▲	7○	8○	11○	12○	6○	17○	5○	1	26	22
64	1●	4○	1○	9○	12○	13○	7○	18○	6○	2	27	23
65	2▲	5○	2●	10○	13○	14○	8●	19●	7○	3	28	24
66	3○	1●	3○	11○	1○	15○	9○	20○	8○	4	29	25
67	1●	2○	4▲	1●	2●	16○	10▲	21○	9○	5	30	26
68	2▲	3▲	5○	2○	3○	17○	11○	22○	10○	6	31	27
69	3○	4○	6○	3○	4○	1○	12○	23○	11○	7●	32	28
70	1●	5○	7○	4○	5○	2○	13○	1○	12○	8○	33	29
71	2▲	1●	1○	5○	6○	3○	14○	2○	13○	9○	34	30
72	3○	2○	2●	6▲	7▲	4○	15○	3○	14○	10○	35	31
73	1●	3▲	3○	7○	8○	5○	16○	4○	15▲	11○	36	32
74	2▲	4○	4▲	8○	9○	6○	17○	5○	16○	12○	37	33
75	3○	5○	5○	9○	10○	7●	18○	6○	17○	13○	1	34
76	1●	1●	6○	10○	11○	8○	19○	7○	18○	14○	2	35
77	2▲	2○	7○	11○	12○	9▲	1○	8○	19○	15○	3	36
78	3○	3▲	1○	1●	13○	10○	2○	9○	20○	16▲	4	37
79	1●	4○	2●	2○	1○	11○	3○	10○	21○	17○	5	38
80	2▲	5○	3○	3○	2●	12○	4○	11○	22○	18○	6	39
81	3○	1●	4▲	4○	3○	13○	5○	12▲	23○	19○	7	40
82	1●	2○	5○	5○	4○	14○	6○	13○	24○	20○	8	41
83	2▲	3▲	6○	6▲	5○	15○	7○	14○	25○	21○	9	1
84	3○	4○	7○	7○	6○	16○	8●	15○	26○	22○	10	2
85	1●	5○	1○	8○	7▲	17○	9○	16○	27○	23○	11	3

86	2▲	1●	2●	9○	8○	1○	10▲	17○	28●	24○	12	4
87	3○	2○	3○	10○	9○	2○	11○	18○	29○	25○	13	5
88	1●	3▲	4▲	11○	10○	3○	12○	19●	1○	26○	14	6
89	2▲	4○	5○	1●	11○	4○	13○	20○	2○	27○	15	7
90	3○	5○	6○	2○	12○	5○	14○	21○	3○	28○	16●	8
91	1●	1●	7○	3○	13○	6○	15○	22○	4○	29○	17○	9
92	2▲	2○	1○	4○	1○	7●	16○	23○	5○	30○	18○	10
93	3○	3▲	2●	5○	2●	8○	17○	1○	6○	31○	19▲	11
94	1●	4○	3○	6▲	3○	9▲	18○	2○	7○	1○	20○	12
95	2▲	5○	4▲	7○	4○	10○	19○	3○	8○	2○	21○	13
96	3○	1●	5○	8○	5○	11○	1○	4○	9○	3○	22○	14
97	1●	2○	6○	9○	6○	12○	2○	5○	10○	4○	23○	15
98	2▲	3▲	7○	10○	7▲	13○	3○	6○	11○	5○	24○	16
99	3○	4○	1○	11○	8○	14○	4○	7○	12○	6○	25○	17●
100	1●	5○	2●	1●	9○	15○	5○	8○	13○	7●	26○	18○
101	2▲	1●	3○	2○	10○	16○	6○	9○	14○	8○	27○	19○
102	3○	2○	4▲	3○	11○	17○	7○	10○	15▲	9○	28○	20○
103	1●	3▲	5○	4○	12○	1○	8●	11○	16○	10○	29○	21▲
104	2▲	4○	6○	5○	13○	2○	9○	12▲	17○	11○	30○	22○
105	3○	5○	7○	6▲	1○	3○	10▲	13○	18○	12○	31○	23○
106	1●	1●	1○	7○	2●	4○	11○	14○	19○	13○	32○	24○
107	2▲	2○	2●	8○	3○	5○	12○	15○	20○	14○	33○	25○
108	3○	3▲	3○	9○	4○	6○	13○	16○	21○	15○	34○	26○
109	1●	4○	4▲	10○	5○	7●	14○	17○	22○	16▲	35○	27○
110	2▲	5○	5○	11○	6○	8○	15○	18○	23○	17○	36○	28○
111	3○	1●	6○	1●	7▲	9▲	16○	19●	24○	18○	37○	29○
112	1●	2○	7○	2○	8○	10○	17○	20○	25○	19○	1○	30○
113	2▲	3▲	1○	3○	9○	11○	18○	21○	26○	20○	2○	31○
114	3○	4○	2●	4○	10○	12	19○	22○	27○	21○	3○	32○
115	1●	5○	3○	5○	11○	13○	1○	23○	28●	22○	4○	33○
116	2▲	1●	4▲	6▲	12○	14○	2○	1○	29○	23○	5○	34○
117	3○	2○	5○	7○	13○	15○	3○	2○	1○	24○	6○	35○
118	1●	3▲	6○	8○	1○	16○	4○	3○	2○	25○	7○	36○
119	2▲	4○	7○	9○	2●	17○	5○	4○	3○	26○	8○	37○
120	3○	5○	1○	10○	3○	1○	6○	5○	4○	27○	9○	38○
121	1●	1●	2●	11○	4○	2○	7○	6○	5○	28○	10○	39○
122	2▲	2○	3○	1●	5○	3○	8●	7○	6○	29○	11○	40○
123	3○	3▲	4▲	2○	6○	4○	9○	8○	7○	30○	12○	41○
124	1●	4○	5○	3○	7▲	5○	10▲	9○	8○	31○	13○	1○

125	2▲	5○	6○	4○	8○	6○	11○	10○	9○	1○	14○	2○
126	3○	1●	7○	5○	9○	7●	12○	11○	10○	2○	15○	3○
127	1●	2○	1○	6▲	10○	8○	13○	12▲	11○	3○	16●	4○
128	2▲	3▲	2●	7○	11○	9▲	14○	13○	12○	4○	17○	5○
129	3○	4○	3○	8○	12○	10○	15○	14○	13○	5○	18○	6○
130	1●	5○	4▲	9○	13○	11○	16○	15○	14○	6○	19▲	7○
131	2▲	1●	5○	10○	1○	12○	17○	16○	15▲	7●	20○	8○
132	3○	2○	6○	11○	2●	13○	18○	17○	16○	8○	21○	9○
133	1●	3▲	7○	1●	3○	14○	19○	18○	17○	9○	22○	10○
134	2▲	4○	1○	2○	4○	15○	1○	19●	18○	10○	23○	11○
135	3○	5○	2●	3○	5○	16○	2○	20○	19○	11○	24○	12○
136	1●	1●	3○	4○	6○	17○	3○	21○	20○	12○	25○	13○
137	2▲	2○	4▲	5○	7▲	1○	4○	22○	21○	13○	26○	14○
138	3○	3▲	5○	6▲	8○	2○	5○	23○	22○	14○	27○	15○
139	1●	4○	6○	7○	9○	3○	6○	1○	23○	15○	28○	16○
140	2▲	5○	7○	8○	10○	4○	7○	2○	24○	16▲	29○	17●
141	3○	1●	1○	9○	11○	5○	8●	3○	25○	17○	30○	18○
142	1●	2○	2●	10○	12○	6○	9○	4○	26○	18○	31○	19○
143	2▲	3▲	3○	11○	13○	7●	10▲	5○	27○	19○	32○	20○
144	3○	4○	4▲	1●	1○	8○	11○	6○	28●	20○	33○	21▲
145	1●	5○	5○	2○	2●	9▲	12○	7○	29○	21○	34○	22○
146	2▲	1●	6○	3○	3○	10○	13○	8○	1○	22○	35○	23○
147	3○	2○	7○	4○	4○	11○	14○	9○	2○	23○	36○	24○
148	1●	3▲	1○	5○	5○	12○	15○	10○	3○	24○	37○	25○
149	2▲	4○	2●	6▲	6○	13○	16○	11○	4○	25○	1○	26○
150	3○	5○	3○	7○	7▲	14○	17○	12▲	5○	26○	2○	27○
151	1●	1●	4▲	8○	8○	15○	18○	13○	6○	27○	3○	28○
152	2▲	2○	5○	9○	9○	16○	19○	14○	7○	28○	4○	29○
153	3○	3▲	6○	10○	10○	17○	1○	15○	8○	29○	5○	30○
154	1●	4○	7○	11○	11○	1○	2○	16○	9○	30○	6○	31○
155	2▲	5○	1○	1●	12○	2○	3○	17○	10○	31○	7○	32○
156	3○	1●	2●	2○	13○	3○	4○	18○	11○	1○	8○	33○
157	1●	2○	3○	3○	1○	4○	5○	19●	12○	2○	9○	34○
158	2▲	3▲	4▲	4○	2●	5○	6○	21○	13○	3○	10○	35○
159	3○	4○	5○	5○	3○	6○	7○	21○	14○	4○	11○	36○
160	1●	5○	6○	6▲	4○	7●	8●	22○	15▲	5○	12○	37○
161	2▲	1●	7○	7○	5○	8○	9○	23○	16○	6○	13○	38○
162	3○	2○	1○	8○	6○	9▲	10▲	1○	17○	7●	14○	39○
163	1●	3▲	2●	9○	7▲	10○	11○	2○	18○	8○	15○	40○

164	2▲	4○	3○	10○	8○	11○	12○	3○	19○	9○	16●	41○
165	3○	5○	4▲	11○	9○	12○	13○	4○	20○	10○	17○	1○
166	1●	1●	5○	1●	10○	13○	14○	5○	21○	11○	18○	2○
167	2▲	2○	6○	2○	11○	14○	15○	6○	22○	12○	19▲	3○
168	3	3▲	7○	3○	12○	15○	16○	7○	23○	13○	20○	4○
169	1●	4○	1○	4○	13○	16○	17○	8○	24○	14○	21○	5○
170	2▲	5○	2●	5○	1○	17○	18○	9○	25○	15○	22○	6○
171	3○	1●	3○	6▲	2●	1○	19○	10○	26○	16▲	23○	7○
172	1●	2○	4▲	7○	3○	2○	1○	11○	27○	17○	24○	8○
173	2▲	3▲	5○	8○	4○	3○	2○	12▲	28●	18○	25○	9○
174	3○	4○	6○	9○	5○	4○	3○	13○	29○	19○	26○	10○
175	1●	5○	7○	10○	6○	5○	4○	14○	1○	20○	27○	11○
176	2▲	1●	1○	11○	7▲	6○	5○	15○	2○	21○	28○	12○
177	3○	2○	2●	1●	8○	7●	6○	16○	3○	22○	29○	13○
178	1●	3▲	3○	2○	9○	8○	7○	17○	4○	23○	30○	14○
179	2▲	4○	4▲	3○	10○	9▲	8●	18○	5○	24○	31○	15○
180	3○	5○	5○	4○	11○	10○	9○	19●	6○	25○	32○	16○
181	1●	1●	6○	5○	12○	11○	10▲	20○	7○	26○	33○	17●
182	2▲	2○	7○	6▲	13○	12○	11○	21○	8○	27○	34○	18○
183	3○	3▲	1○	7○	1○	13○	12○	22○	9○	28○	35○	19○
184	1●	4○	2●	8○	2●	14○	13○	23○	10○	29○	36○	20○
185	2▲	5○	3○	9○	3○	15○	14○	1○	11○	30○	37○	21▲
186	3○	1●	4▲	10○	4○	16○	15○	2○	12○	31○	1○	22○
187	1●	2○	5○	11○	5○	17○	16○	3○	13○	1○	2○	23○
188	2▲	3▲	6○	1●	6○	1○	17○	4○	14○	2○	3○	24○
189	3○	4○	7○	2○	7▲	2○	18○	5○	15▲	3○	4○	25○
190	1●	5○	1○	3○	8○	3○	19○	6○	16○	4○	5○	26○
191	2▲	1●	2●	4○	9○	4○	1○	7○	17○	5○	6○	27○
192	3○	2○	3○	5○	10○	5○	2○	8○	18○	6○	7○	28○
193	1●	3▲	4▲	6▲	11○	6○	3○	9○	19○	7●	8○	29○
194	2▲	4○	5○	7○	12○	7●	4○	10○	20○	8○	9○	30○
195	3○	5○	6○	8○	13○	8○	5○	11○	21○	9○	10○	31○
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

定理 4　$HA(q_1 \to q_n)$和$HB(q_1 \to q_n)$分别表 A 极限布局和 B 极限布局$q_1 \to q_n$第一通道最迟可能出现之行位，有

$$HB(q_1 \to q_n) \le HA(q_1 \to q_n). \tag{28}$$

证　▲在各列数字串中的位置是确定性的，在我们竭尽全力堵通道时，它只能“守株待兔”，不听调遣。于是“第三原则”得不到坚持，相对于 A 极限布局，从 q_3 列起，B 极限布局之第一通道提前了。本定理证毕。

5.3 主要结论

定理 5　E 表偶数， q_n 为小于 $\sqrt{E}$ 之最大奇素数，为奇素数表中第 n 个奇素数，为奇数表中第 m 个奇数，则，当 $n \geq 45$, 即 $q_n \geq 199$, 即 $E \geq 39602$ 时，(1+1)成立，亦即不小于 39602 的任一偶数都可表成两个奇素数之和。

证　至此，我们的思路已十分清楚，就是用最极端之手段去堵通道，寻找奇素数对最晚可能出现之位置，此工作在定理 3 已完成，定理 4 又得到 $HB(q_1 \to q_n) \leq HA(q_1 \to q_n)$, 显然，只要 A 极限布局第一通道出现在 ESRS 内，即 Q 方阵第一域内，则(1+1)成立。ESRS 之行数为 L，第一域之边界为 $\frac{q_n^2+1}{4}$，(8)已有 $\frac{q_n^2+1}{4} \leq L$, 显然，若得到 $HA(q_1 \to q_n) \leq \frac{q_n^2+1}{4}$， 则(1+1)成立。 q_n 为第 m 个奇数，有 $q_n = 2m-1$, 定理 3 已得 $HA(q_1 \to q_n) < 1+2n^2$， 于是，只要得到 $1+2n^2 \leq \frac{(2m-1)^2+1}{4}$，则(1+1)成立。 即，只要得到 $2n^2 \leq \frac{(2m-1)^2+1}{4} - 1$, 则(1+1)成立。而 $\frac{(2m-1)^2+1}{4} - 1 = m^2 - m - \frac{1}{2} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$，且 $m \geq \frac{3}{2}$ 时，有 $(m-1)^2 \leq \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$，于是显然，只要得到 $2n^2 \leq (m-1)^2$，即 $\frac{(m-1)^2}{n^2} \geq 2$, $\frac{m-1}{n} \geq \sqrt{2}$, 则(1+1)成立。因为 $\frac{m-1}{n+1} < \frac{m-1}{n}$，所以，显然，只要得到 $\frac{m-1}{n+1} \geq \sqrt{2}$，亦即 $\frac{2m-2}{n+1} \geq 2\sqrt{2}$, $\frac{2m-2+1}{n+1} \geq 2\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$， 则(1+1)成立。 因为 $n > 1$ 时，有 $\frac{1}{n+1} < 1$, 于是显然，只要得到 $\frac{2m-2+1}{n+1} \geq 2\sqrt{2} + 1$, 则(1+1)成立，即只要得到

$$\frac{2m-1}{n+1} \geq 2\sqrt{2} + 1, \tag{29}$$

则(1+1)成立。

注意到，由罗素不等式 $\delta \ln \delta < p_\delta < \delta(\ln \delta + \ln \ln \delta)$, $\delta \geq 6$, p_δ 为素数表中第 δ 个素数，有 $\frac{p_\delta}{\delta} > \ln \delta$. 我们观注 q_n，它是奇素数表中第 n 个奇素数，现令其为素数表中第 δ 个素数，即 $q_n = p_\delta$，显然有 $\delta = n+1$. 例如素数 7 应为 p_4，q_3，即第 4 号素数，第 3 号奇素数，4=3+1. 随之， $\frac{p_\delta}{\delta} > \ln \delta$ 可写为 $\frac{q_n}{n+1} > \ln(n+1)$, 因 $q_n = 2m-1$, 所以又可写为 $\frac{2m-1}{n+1} > \ln(n+1)$.

至此，本文借助罗素不等式得到

$$\frac{2m-1}{n+1} > \ln(n+1). \tag{30}$$

比较(29)与(30), 显然，**只要** $\ln(n+1) \geq 2\sqrt{2} + 1$, **则(1+1) 成立。** 亦即只要 $n+1 \geq e^{2\sqrt{2}+1}$, 即 $n \geq e^{2\sqrt{2}+1} - 1$, 则 (1+1)成立。而 $e^{2\sqrt{2}+1} - 1 = 44.99$，所以，只要 $n \geq 45$, 即 $q_n \geq 199$, 即 $E \geq 39602$, 则 (1+1)成立。本定理证毕。

大于等于 6 小于 39602 之偶数早有人做过(1+1)验证。

定理 6　若认为“加 2 倍前列通道平均间距”” 不安全，也可“加 3 倍”，“加 4 倍”，“加 5 倍”，…，总能找到一个 E 与之对应，无穷递降，万无一失。

证　细查定理 5 之推演过程，易见，“**只要** $\ln(n+1)\geq 2\sqrt{2}+1$, **则(1+1) 成立**”中 $\sqrt{2}$ 里的 2 就是(27)中“$1+2n^2$” 里的 2, 就是定理 2 中“**加 2 倍前列通道平均间距**”里的 **2**. 显然，若定理 2 不说“**加 2 倍**”，而说“加 3 倍…”，“加 4 倍…”，“加 5 倍…”，…，那么，定理 5 无非将 $\sqrt{2}$ 换成 $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \cdots$，且总能找到一个 n，一个 q_n，一个 E 与之对应。若说“加 3 倍”，那么只要 $n\geq e^{2\sqrt{3}+1}-1$, 则(1+1)成立。而 $e^{2\sqrt{3}+1}-1=85.8$，于是只要 $n\geq 86$, 即 $q_n\geq 449$, 即 $E\geq 201602$, 则 (1+1)成立；若说“加 4 倍”，只要 $n\geq e^{2\sqrt{4}+1}-1$, 则 (1+1) 成立。而 $e^{2\sqrt{4}+1}-1=147.4$，只要 $n\geq 148$, 即 $q_n\geq 859$, 亦即 $E\geq 737882$, 则 (1+1)成立。…，这才是真正的“无穷递降”。罗素不等式为我们从“序”的角度看(1+1)扫清了障碍，我们的方法将万无一失。

还要指出的是，A 极限布局是问题 A 之 $\binom{q_1}{2}\binom{q_2}{2}\binom{q_3}{2}\cdots\binom{q_n}{2}$ 种布局中最极端的那种形式，不是(1+1)之真实，B 极限布局也不是(1+1)之真实。对照 ESRS 与 Q 方阵，易见，对于任何一个(1+1)实例，●都是▲的延续，只是在 $E/2$ 处折了回来，●的位置本来也是确定性的。所以，这通道，堵上与堵不上都是自然的行为，不能人为地操作。我们搞人为操作，是有意制造一种最坏的情形， 然后论证，即便在这最坏的情形下，（1+1）也成立。实际上，加 1 倍平均间距已经够了，已经过了，而我们加了 2 倍。

本定理证毕。

6. 关于“序”

引言中说的奇数对 $E-1,1$ 在 ESRS 的第一行，当然也应当是 Q 方阵的第一行。“距奇数对 $E-1,1$ 最近的那个奇素数对距 $E-1,1$ 最远有多远”，这话是对 Q 方阵中说的。 令这个最迟出现的行数为 ς, 若 $\varsigma\leq L$, 当然（1+1）成立。因为，这时这个奇素数对在 ESRS 内。有些过程，看不清规律，那它也许是某个全过程的一部分，全过程藏在暗处。ESRS 放在 Q 方阵内，才能看出循环。当然 ESRS 是实的， Q 方阵是虚的。

7. 关于偶数唯一分解定理，集合 Q, P, S

在研究（1+1）命题的过程中，很容易想到，随偶数之单增，如果奇素数对也单增，那似乎可以从单调性上找出一条路来。然而，不随人愿，奇素数对并不随偶数之单增而单增。这根源就在于偶数之结构。本文提出的偶数唯一分解定理的写法及集合 Q, P, S 理论，特别是空集理论，为认识偶数之结构开辟了道路。现在可以看到，这单调性存在于任何一类结构的偶数中。 可以这样说，对于 $E=2\times 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_v^{\alpha_v}$，这 N_{p-p} 不是随 E, 而是随其它任一参数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$，$p_1, p_2$，$p_3, \ldots, p_v$ 之单增而单增。

8“素变数公倍数”,“覆盖”及（1+1）之实际

回头看 Q 方阵之元初图形及 5 个素变数公倍数问题。显然有 $HC(q_1 \to q_n) = 1$, 而且显然 $HD(q_1 \to q_n) = q_1 q_2 q_3 \cdots q_n$, $HE(q_1 \to q_n) \le HD(q_1 \to q_n)$. 在 $q_1 \to q_n$ 的一个循环中，各列全为〇之行出现的次数，D 布局为 1, 即

$$\mu D(q_1 \to q_n) = \langle q_1 - (q_1 - 1) \rangle \langle q_2 - (q_2 - 1) \rangle \langle q_3 - (q_3 - 1) \rangle \cdots \langle q_n - (q_n - 1) \rangle = 1, \qquad (31)$$

式中 $q_1 - 1,\ q_2 - 1,\ q_3 - 1, \cdots,\ q_n - 1$ 为●的个数，A 布局均为

$$\mu A(q_1 \to q_i) = (q_1 - 2)(q_2 - 2) \cdots (q_n - 2), \qquad (32)$$

式中 2 为●的个数。所以，倘若说“通道”，无疑，D 局每 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 行有 1 条，而 A 局每 $\frac{q_1}{q_1 - 2} \cdot \frac{q_2}{q_2 - 2} \cdot \frac{q_3}{q_3 - 2} \cdot \cdots \cdot \frac{q_n}{q_n - 2}$ 行有 1 条。而，若换个说法，说“最小公倍数”，且分别用 $L.C.M.D(q_1 \to q_n)$ 及 $L.C.M.A(q_1 \to q_n)$ 表之，显然有

$$L.C.M.D(q_1 \to q_n) = q_1 q_2 q_3 \cdots q_n, \qquad (33)$$

$$L.C.M.A(q_1 \to q_n) = \frac{q_1}{q_1 - 2} \cdot \frac{q_2}{q_2 - 2} \cdot \frac{q_3}{q_3 - 2} \cdot \cdots \cdot \frac{q_n}{q_n - 2}, \qquad (34)$$

与 D 局相比，A 局各列数字串的数字中，●减少了，〇增加了，最小公倍关系变了，这就是我们的“素变数公倍数”思想。由此出发，D 局之最小公倍亦应写为一般的式子

$$L.C.M.D(q_1 \to q_n) = \frac{q_1}{q_1 - (q_1 - 1)} \cdot \frac{q_2}{q_2 - (q_2 - 1)} \cdot \frac{q_3}{q_3 - (q_3 - 1)} \cdot \cdots \cdot \frac{q_n}{q_n - (q_n - 1)}, \qquad (35)$$

式中 $q_1 - 1,\ q_2 - 1,\ q_3 - 1, \cdots,\ q_n - 1$ 为●的个数。

(34)即

$$L.C.M.A(q_1 \to q_n) = \frac{3}{3-2} \times \frac{5}{5-2} \times \frac{7}{7-2} \times \frac{11}{11-2} \times \cdots \times \frac{q_n}{q_n - 2}, \qquad (36)$$

同(15)变为(16)之理由，有

$$L.C.M.A(q_1 \to q_n) \le \frac{3}{3-2} \times \frac{5}{5-2} \times \frac{7}{7-2} \times \frac{9}{9-2} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2n-1} = 2n + 1 \le q_n. \qquad (37)$$

作者检验过 $E = 2 \times 2^{\alpha_0}$, $\alpha_0 = 6, 7, 8, \cdots, 35$ 之各种情形之(1+1)实例，若令 Hf 表示 EOS 中第一个奇素数对所在行之序号，有

$$Hf < q_n. \qquad (38)$$

如果比较(29),(30)与(12)，我们也可这样说：ESRS 中第一个奇素数对所在行之序号之数值不超过通道之平均间距之数值。这也是（1+1）之真实情况。

3. “第 1 列每个数字串有 1 个〇，第 2 列每个数字串有 3 个〇，第 3 列每个数字串有 5 个〇，第 4 列每个数字串有 9 个〇，由于四列数字串的长度不同，各列的〇早晚要赶到同一行，”——这一思想，还可用“覆盖”来解读。不过，现有的有关“覆盖”的理论不行，凸集理论不行，海莱（Helly）定理不行，要建立新理论。不管这个新理论会是什么样子，而用其得到的最终结果应当是(38).

9. 结语

1. 天作棋盘星为子，地作琵琶路为弦。本文后半部主要是回答和解释对前稿的提问和质疑。

2. 1742 至今，272 年，（1+1）长夜未央。原因可能有三：第一，观察问题之角度单一，

只从“量”，不从“序”；第二，过多地从共性出发，全心地依赖同余理论，Euler 定理，只要是整数问题，就求救于素变数三角和，不管是否必要，一律做无穷大阶的比较，鏖战 Landau 记号；第三，盲目追求工具之形式，越复杂越好。作者不怀疑，一定会有人正努力将（1+1）与庞加莱猜想扯上，然后由于庞加莱猜想解决了，(1+1)就“解决了”。

3. 过分地宣扬 (9+9), ⋯, (3+4), ⋯, (1+2)，排斥异己，是不厚道的。一条错路上的任何一步，都是与终极目标相隔相背的，准确地说，那也算不得什么成就。我们的工夫应当下在寻找新路上。沉舟侧畔千帆过，病树前头万木春。

欢迎批评，指教。

http://www.qptj.com

参考文献

[1] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some function of prime numbers, Illinois J. Math; 6 (1962), 64 --- 94.