（2006 年 1 月 1 日本文以《互素理论与费马最后定理（B）》之题目首发于互联网，根据读者建议，2017 年 1 月 25 日再次修改，并启用本标题。）www.qptj.com

用初等方法证明费马最后定理(B篇)

-互素理论与费马最后定理(B篇)

王瑞林

镇赉县交通局　吉林镇赉(137300)

chinawrl@126.com

摘要: 本文以互素理论为工具，以二项式定理为平台，证明了：$p>3$ 为奇素数，方程 $x^p+y^p=z^p$ 无两两互素的正整数解 x,y,z, 亦即使用在有理整数系统内操作的方法证明了费马最后定理成立。

关键词：费马最后定理，费马方程，互素理论，二项式定理

中图分类号：0156.4　文献标识码：

Proving Fermat's Last Theorem by a elementary method (B)

-Coprime Theory and Fermat's Last Theorem(B)

WANG Rui-lin

Communications Bureau of the county of Zhenlai　Jilin Zhenlai of China (137300)

Chinawrl@126.com

Abstract: In this paper, taking coprime theory as tools, taking Binomial Theorem as a platform, we have proved : For any odd prime $p>3$, the equation $x^p+y^p=z^p$ has no solutions with x,y,z which are positive integers and coprime in pairs, i.e. in a way operating in the system of rational integers have proved Fermat's Last Theorem true.

Key Words: Fermat's Last Theorem, Fermat's equation, Coprime theory, Binomial Theorem,

1. 引言

费马最后定理即：对任何自然数 $n>2$, 方程 $x^n+y^n=z^n$ 无非零整数解 x,y,z, 且问题早已归结到只需解决 $n=p>3$ 为奇素数， x,y,z 为两两互素之正整数之情形。 要指出的是，A. Wiles 未能终结该定理之研究（关于他的文章 Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann of Math 141 1995*, 我同意 Daniel J. Velleman 的评论 Fermat's Last Theorem and Hibert's Program, *The Mathematical Intelligencer, Vo.19 No. 19, No1. 1. 1997,*) 迄今，世界

上许多数学家，仍在为找到一个可以被不同学派接受的，不涉嫌数学基础之争论之方法，给这个著名定理以真正义意上的证明，而努力工作，且无疑，最好是能找到一个初等方法。

n 为奇素数时，将二项式定理写成 $(x+y)^n=(x^n+y^n)+nxy(x+y)\Psi(n,x,y)$，且变形成为 $x^n+y^n=(x+y)\langle(x+y)^{n-1}-nxy\Psi(n,x,y)\rangle$，式中 $\Psi(n,x,y)$ 为一个代数式，因 n 而异（注意：n 为奇和数时写不成，见结语）。之后证出 $x+y,\ \ xy,\ \ \Psi(p,x,y)$ 三者两两互素，找到区别结构类型的理论根据， 将命题先分为两种情况 $(x+y,\ p)=1,\ \ (x+y,\ p)=p$，再化成三个模型 $(xy,\ p)=p,\ \ (x+y,\ p)=p,\ \ (\Psi(p,x,y),\ p)=p$ 分别讨论。

互素理论是本文的主要工具，出发点是变量在系统中的对立统一关系，即变量之间的互素关系和系统的可除性，哲学背景是唯物辩证法。

本文的许多步都是在求索某等式成立之必要条件， 最后因发现该等式某两个必要条件之间存在矛盾而结局。所以，本文不谈，也无需谈充分条件。推理主要用一种形式的语句，即“只有 A 为真，B 才有可能为真。” 论述中暗用了两个可以免证的定理，即“若干个整数与一个分数之和一定不为整数”及“两个或多个分数之和有可能为整数。”本文“整数”只指有理整数，“分数”只指不能化成整数之分数， 未加说明的字母表整数。文中所谈“因子”，一般不涉及1 和 -1. 为简捷，用 $a\in M$ 表 a 是 M 之因子，a,M 为代数式。此外，再没使用集合论之任何理论和符号。

本文独立成文，与任何他人文章无关，与“同余”、“某种形式素数的存在性”、“无穷递降法”、“分圆域”、“椭圆曲线”等无关。

为方便审阅，本文之所有公式均以最基本、最直观的形式写出。

作者关于 FLT 写了两篇文章，本文是第二篇，用到了“系统中的变量在数值上的比例关系”，另一篇则自始至终着眼于“系统的可除性”。

2. 互理理论

定理 1,2,3,4,5 为加法定理，6,7 为乘法定理，8 为二元 p 次型。

定理 1 u,v 为整数，$(u,\ v)=1$, 有 $(u+v,\ uv)=1.$

证 考虑等式 $u+v=w.$ 因 $(u,\ v)=1$, 若 $(w,\ u)=t\neq1$, 除以 t, 左第二项化为分数；若 $(w,\ v)=t\neq1$, 除以 t, 左第一项化为分数。显然只有 $(w,\ uv)=1$, 该式才有可能成立。（若干个整数与一个分数之和一定不为整数，两个分数之和有可能为整数） 本定理证毕。

定理 2 u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1$, 有 $(u+kv,\ v)=1.$

证 1. 若 $(u,\ k)=1$, 由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u,\ kv)=1$, 再由定理 1 有 $(u+kv,\ ukv)=1$. 2. 若 $(u,\ k)=t\neq1$, 令 $u=at$, $k=bt$, $(a,\ b)=1$, 于是 $(u+kv,\ v)=1$ 化为 $(t(a+bv),\ v)=1.$ 而 由 $(u,\ v)=1$, $u=at$ 有 $(t,\ v)=1$, 显然，证出 $(a+bv,\ v)=1$ 成立即可。由 $(u,\ v)=1$, $u=at$, $(a,\ b)=1$ 有 $(a,\ bv)=1$, 再由定理 1 有 $(a+bv,\ abv)=1$. 本定理证毕。

定理 3 u,v,k_i 为整数，$(u,\ v)=1,\ \ k_0=|k_n|=1,$ 有 $\left(\sum_{i=0}^{n}k_i u^{n-i}v^i,\ uv\right)=1.$

证 $|k_n|=1$时，显然可将 k_n 写成 $(-1)^c$，c 为正整数。于是当 $k_0=|k_n|=1$ 时有

证 $|k_n|=1$时，显然可将 k_n 写成 $(-1)^c$，c 为正整数。于是当 $k_0=|k_n|=1$ 时有

$$\sum_{i=0}^{n}k_i u^{n-i}v^i=u^n+k_1u^{n-1}v+k_2u^{n-2}v^2+k_3u^{n-3}v^3+\cdots+k_{n-3}u^3v^{n-3}$$
$$+k_{n-2}u^2v^{n-2}+k_{n-1}uv^{n-1}+(-1)^c v^n. \tag{1}$$

(1) 可化为

$$\sum_{i=0}^{n}k_i u^{n-i}v^i=u\left\{u\left\langle u\cdots u\left[u\left(u+k_1v\right)+k_2v^2\right]+k_3v^3\cdots+k_{n-2}v^{n-2}\right\rangle+k_{n-1}v^{n-1}\right\}+(-1)^c v^n \tag{2}$$

如果令 $\Omega_1=u+k_1v,\ \ \Omega_2=u\,\Omega_1+k_2v^2$，$\Omega_3=u\,\Omega_2+k_3v^3$，$\ldots$，$\Omega_{n-1}=u\,\Omega_{n-2}+k_{n-1}v^{n-1}$，$\Omega_n=u\,\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n$，则有 $\sum_{i=0}^{n}k_i u^{n-i}v^i=\Omega_n$. 显然，证出 $(\Omega_n,\ uv)=1$ 成立则可。

因$(u,\ v)=1,$ 由定理 2 有$(u+k_1v,\ v)=1,$ 即$(\Omega_1,\ v)=1;$ 再由$(u,\ v)=1$有$(u\,\Omega_1,\ v)=1,\ \ (u\,\Omega_1,\ v^2)=1,$ 于是由定理 2 有 $(u\,\Omega_1+k_2v^2,\ v^2)=1,$ 亦即 $(\Omega_2,\ v^2)=1;$ 再由 $(u,\ v)=1$有$(u\,\Omega_2,\ v^2)=1,\ \ (u\,\Omega_2,\ v^3)=1,$ 于是由定理 2 有 $(u\,\Omega_2+k_3v^3,\ v^3)=1,$ 即 $(\Omega_3,\ v^3)=1;$ $\ldots$，
$(\Omega_{n-1},\ v^{n-1})=1;$ 再由$(u,\ v)=1$有$(u\,\Omega_{n-1},\ v^{n-1})=1,\ \ (u\,\Omega_{n-1},\ v^n)=1,\ \ (u\,\Omega_{n-1},\ (-1)^c v^n)=1,$ 至此由定理 1 有 $(u\,\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n,\ u\,\Omega_{n-1}(-1)^c v^n)=1,$ 由此易见有 $(\Omega_n,\ uv)=1.$ 本定理证毕。

定理 4 a,b,v 为整数，$(a,\ v)=|v|,\ \ (b,\ v)=1,$ 有 $(a+b,\ v)=1,\ \ (a+(a+b),\ v)=1.$

证 令 k,u 为整数且 $a=kv,\ \ (k,\ v)=1,\ \ b=u,$ 命题 1 化为：u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1,$
有$(u+kv,\ v)=1.$ 显然此乃定理 2 之命题。令 $c=a+b,$ 命题 2 化为：a,c,v 为整数，$(a,\ v)=|v|,\ \ (c,\ v)=1,$ 有 $(a+c,\ v)=1.$ 与命题 1 相同。本定理证毕。

定理 5 a,b 为正整数，$ab\neq1,\ \ (a,\ b)=1,$ 则有 $a-b\neq0.$ （证略）

定理 6 a,b,c,d 为正整数，$(a,\ b)=(a,\ c)=(b,\ d)=1,$ 则只有当 $a=d,\ \ b=c$ 时，$ab=cd$ 才有可能成立。（证略）

定理 7 a,b,c,d 为整数，$abcd\neq0,\ \ (a,\ c)=1,$ 则只有当 $d=Ua,\ \ b=Uc,\ U\neq0$ 为整数时，$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ 才有可能成立。我们将 d,b 向 Ua,Uc 的转化叫做 U 变换。（证略）

定理 8 u,v 为整数，$uv\neq0,\ \ (u,\ v)=1,$ p 为奇素数，且令

$$\Psi(p,u,v)=\frac{(u+v)^p-(u^p+v^p)}{(u+y)puv},\tag{1}$$

则 1. 有 $u+v,\ uv,\ \Psi(p,u,v)$ 两两互素，即

$$(u+v,\ \ uv)=(u+v,\ \ \Psi(p,u,v))=(uv,\ \ \Psi(p,u,v))=1;\tag{2}$$

2. $(u+v,\ \ p)=1$时，有

$$\left((u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v),\ \ p\right)=1,\tag{3}$$

$$\left(u+v,\ (u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v)\right)=1;\tag{4}$$

$(u+v,\ \ p)=p$ 时，有

$$\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v),\ \ p\right)=1,\tag{5}$$

$$\left(p(u+v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v)\right)=1;\tag{6}$$

证 1. 我们首先注意到，(1)可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\langle\langle u+v\rangle^{p-1}-puv\Psi(p,u,v)\right\rangle.\tag{7}$$

我们还注意到，用二项式定理展开$(u+v)^p$，有

$$(u+v)^p=u^p+\binom{p}{1}u^{p-1}v+\binom{p}{2}u^{p-2}v^2+\cdots+\binom{p}{p-2}u^2v^{p-2}+\binom{p}{p-1}uv^{p-1}+v^p,\tag{8}$$

且可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\{(u+v)^{p-1}-puv\left\langle\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{\binom{p}{2}(u^{p-4}+v^{p-4})}{p(u+v)}uv+\cdots+\frac{\binom{p}{(p-1)/2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}\right\rangle\right\}.\tag{9}$$

比较(7)和(9), 有

$$\Psi(p,u,v)=\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{\binom{p}{2}(u^{p-4}+v^{p-4})uv}{p(u+v)}+\cdots+\frac{\binom{p}{(p-1)/2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}.\tag{10}$$

因 p 为奇素数，所以 $p-2,\ p-4,\ p-6,\ \ldots$ 皆为奇数，于是 $u^{p-2}+v^{p-2}$， $u^{p-4}+v^{p-4}$，$u^{p-6}+v^{p-6}$， … 一定能被 $u+v$ 整除；观察 $\binom{p}{k}=\dfrac{p!}{(p-k)!k!}$， 因 p 为素数，且 $k<p$, 分母诸因子均小于 p, 所以分子中的 p 一定不会与分母之任何素因子相约（而若 p 为奇合数，情况就不是这样)，于是显然 $\binom{p}{k}/p$ 一定为整数，所以(10)之各项皆为整数。

我们还注意到，(1)还可化为

$$\Psi(p,u,v)=\frac{1}{puv}\left\{(u+v)^{p-1}-\left\langle(u^{p-1}+v^{p-1})-(u^{p-3}+v^{p-3})uv+(u^{p-5}+v^{p-5})(uv)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+(-1)^{(p-3)/2}(u^2+v^2)(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}\tag{11}$$

我们还注意到， j 为偶数时有

$$u^j+v^j=(u+v)^j+L_1(u+v)^{j-2}uv+L_2(u+v)^{j-4}(uv)^2+L_3(u+v)^{j-6}(uv)^3+\ldots$$
$$+L_{(j-4)/2}(u+v)^4(uv)^{(j-4)/2}+L_{(j-2)/2}(u+v)^2(uv)^{(j-2)/2}+L_{j/2}(uv)^{j/2}.\tag{12}$$

至此，易见(10)和(11)最终皆可转化为

$$\Psi(p,u,v)=k_0(u+v)^{p-3}+k_1(u+v)^{p-5}uv+k_2(u+v)^{p-7}(uv)^2+\cdots$$
$$+k_{(p-5)/2}(u+v)^2(uv)^{(p-5)/2}+k_{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{13}$$

因 $p-2$ 为奇数，由 $a^p+b^p=(a+b)(a^{p-1}-a^{p-2}b+\cdots-ab^{p-2}+b^{p-1})$ 易得

$$u^{p-2}+v^{p-2}=(u+v)\left\langle(u^{p-3}+v^{p-3})-(u^{p-5}+v^{p-5})uv+(u^{p-7}+v^{p-7})(uv)^2-\ldots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}\right\rangle,$$

于是显见(10)右第一项可化为

$$(u^{p-3}+v^{p-3})-(u^{p-5}+v^{p-5})uv+(u^{p-7}+v^{p-7})(uv)^2-\ldots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}.$$

而(13)右第一项正是由此式第一项 $(u^{p-3}+v^{p-3})$ 转化而来，于是显见有 $k_0=1$. 事实上，只要注意到 $(u+v)^{p-3}$ 是由 $(u^{p-3}+v^{p-3})$ 转化而来的，我们从(11)向(13)之转化亦不难看出，有

$$k_0=\frac{1}{p}\left\langle\binom{p-1}{1}+1\right\rangle=1. \tag{14}$$

现在来证明 $|k_{(p-3)/2}|=1$. 首先易见 $k_{(p-3)/2}$ 是当 $j=2,4,6,\ldots,p-1$ 时，(11)中的 u^j+v^j 向(13)中的 $(u+v)^j$ 转化时生成的以 uv 为因子，不以 $u+v$ 为因子的项的系数的代数和。为方便，我们把这些项称为 uv 项，且用 σ_j 表示其系数。显见 σ_j 亦即(12)中的 $L_{j/2}$. 例如 $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$, 则 $\sigma_2=-2$; $u^4+v^4=(u+v)^4-4(u+v)^2uv+2(uv)^2$，则 $\sigma_4=2$; …

我们先根据(12)挑出(11)两端的 uv 项，即

$$\Psi(p,u,v)\text{的}\,uv\,\text{项}=\frac{1}{puv}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}(uv)^{(p-1)/2}-\sigma_{p-3}(uv)^{(p-3)/2}uv+\sigma_{p-5}(uv)^{(p-5)/2}(uv)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2uv(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}$$
$$=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\ldots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{15}$$

于是显然有

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\ldots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}. \tag{16}$$

再来考察 σ_j 的变化规律。注意到 $j\geq4$ 时有

$$u^j+v^j=(u^2+v^2)(u^{j-2}+v^{j-2})-(u^{j-4}+v^{j-4})(uv)^2, \tag{17}$$

j 为偶数时，我们亦可根据(12)挑出其两端的 uv 项，即

$$\sigma_j(uv)^{j/2}=\sigma_2uv\,\sigma_{j-2}(uv)^{(j-2)/2}-\sigma_{j-4}(uv)^{(j-4)/2}(uv)^2=(\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4})(uv)^{j/2}, \tag{18}$$

由此易见有 $\sigma_j=\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}$，再由 $\sigma_2=-2$, 有

$$\sigma_j=-2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}. \tag{19}$$

于是显然有

$$\sigma_6=-2\sigma_4-\sigma_2=-2(2)-(-2)=-2,$$
$$\sigma_8=-2\sigma_6-\sigma_4=-2(-2)-2=2,$$
$$\sigma_{10}=-2\sigma_8-\sigma_6=-2(2)-(-2)=-2,$$
$$\sigma_{12}=-2\sigma_{10}-\sigma_8=-2(-2)-2=2,$$
$$\cdots$$

从 $j=2$ 起，σ_j 按 -2, 2, -2, 2, … 之规律排列，$j/2$ 为奇，$\sigma_j=-2$, $j/2$ 为偶，$\sigma_j=2$.

于是 $(p-1)/2$ 为奇数时(16)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\{0-\langle(-2)-2+(-2)-2+\ldots+(-2)-1\rangle\},\tag{20}$$

即

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(-2)\frac{p-1}{2}-1\right\rangle\right\}=1;\tag{21}$$

$(p-1)/2$ 为偶数时(16)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\{0-\langle 2-(-2)+2-(-2)+\ldots+2+1\rangle\},\tag{22}$$

即

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(2)\frac{p-1}{2}+1\right\rangle\right\}=-1.\tag{23}$$

至此已有 $k_0=|k_{(p-3)/2}|=1$. 由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u+v,\ uv)=1$, $((u+v)^2,\ uv)=1$, 再由定理 3 有 $\left(\sum_{i=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}-i}(uv)^i,\ (u+v)^2uv\right)=1$. 因(13)即 $\Psi(p,u,v)=\sum_{i=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}-i}(uv)^i$, 于是有 $(\Psi(p,u,v),\ (u+v)^2uv)=1$, 注意到 $(u+v,\ uv)=1$, 显见(2)成立。

2. 如若 $(u+v,\ p)=1$, 由 (2)易见有 $((u+v)^{p-1},\ puv\Psi(p,u,v))=1$, 再由定理 1 显然有 $((u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v),\ (u+v)^{p-1}puv\Psi(p,u,v))=1$. 由此显见 (3),(4) 成立。

如若 $(u+v,\ p)=p$, 由(2)易见有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ uv\Psi(p,u,v)\right)=1$, 再由定理 1 显然有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}uv\Psi(p,u,v)\right)=1$, 注意到此时 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ p\right)=p$, 于是显见(5),(6)成立。本定理证毕。

将 v 换成 $-v$ 本定理仍成立，其形式被称为减法形式，被写为:

$$\Psi(p,u,-v)=\frac{(u-v)^p-(u^p-v^p)}{-(u-v)puv},\qquad u^p-v^p=(u-v)\langle(u-v)^{p-1}+puv\Psi(p,u,-v)\rangle.$$

3. 一个预备定理

定理 9 p 为奇素数，我们考察方程

$$x^p+y^p=z^p\tag{1}$$

的正实数解 x,y,z 在数值上的比例关系。令 $x<y$, $y/x=k$, 即 $y=kx$, 且令 $x=z-r$, $y=z-s$, k,r,s 为正实数，则只有当

$$x:y:z=1:k:(1+k^p)^{1/p}\tag{2}$$

$$x+y=(1+k)x,\tag{3}$$

$$r=\langle(1+k^p)^{1/p}-1\rangle x,\tag{4}$$

$$s=\langle(1+k^p)^{1/p}-k\rangle x,\tag{5}$$

$$z:r:s=\left(1+k^p\right)^{1/p}:\left(1+k^p\right)^{1/p}-1:\left(1+k^p\right)^{1/p}-k \tag{6}$$

时(1)才有可能成立，而且有以下四式成立：

$$\frac{1}{\ln p}\ln\frac{2\left\{p\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle\right\}^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\ln p}\ln\frac{2\left\langle p(1+k)\right\rangle^{1/p}}{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}+\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1. \tag{8}$$

$$\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\left\{p\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle\right\}^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\left\langle p(1+k)\right\rangle^{1/p}}{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}+\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1. \tag{10}$$

证 由 $y/x=k$，易见 (1)可化为 $x^p+(kx)^p=z^p$，以及 $\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}x\right\rangle^p-z^p=0$. 显然只有 $z=\left(1+k^p\right)^{1/p}x$，亦即只有当 x,y,z 在数值上满足(2)时，(1)才有可能成立。 由 $y=kx$ 以及 $z=\left(1+k^p\right)^{1/p}x$， $x=z-r$， $y=z-s$ 易得 (3), (4), (5),(6).

关于(7), 第一，我们注意到， $k=1$ 时，(7) 对任何 p 均成立，这是因为此时(7)可化为 $2^{1/p}<1+2\left(1-\frac{2}{p^{(p-1)/p}+2}\right)^p$，且由 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(1-\frac{2}{p^{(p-1)/p}+2}\right)^p=\frac{1}{e^2}$ 易见此式左关于 p 递减，而且从 $p=13$ 起，右关于 p 递增， $p=3,5,7,11$ 已检验；第二， p 给定，(7)左关于 k 递减，因为(7)亦即 $\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1$， p 给定， $\frac{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}$ 关于 k 递减， $\to 1^+$；第三， k 给定，(7)左明显关于 p 递减。且只需考虑 $k>1$. 显见(7)成立。

关于(8) :第一, (8)可写为 $\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\ln p}\ln\frac{(1+k)^{1/p}}{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}+\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<1$， p 给定，

$\frac{(1+k)^{1/p}}{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}+\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}$ 关于 k 递增且 $\to 1^-$，亦即，当 $k\in(1,\ +\infty)$ 时，一直有

$$\ln\frac{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<0,$$

$$\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-1\right\rangle^{1/p}}{(1+k)^{1/p}-\left\langle\left(1+k^p\right)^{1/p}-k\right\rangle^{1/p}}<\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p};$$

第二， $\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p}$ 关于 p 递减，且 $p=3$ 时有 $\frac{\ln 2}{\ln p}+\frac{1}{p}<1$. 于是显见 (8)成立。

由(7)显见(9)成立；由(8)显见(10)成立。本定理证毕。

4. 费马最后定理的证明

定理 10 $P>3$ 为奇素数，方程

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

无两两互素的正整数解 $x, y, z.$.

证 将(1)看成一个等式，考虑 x, y, z 满足哪些关系时(1)才有可能成立。我们先寻找这些关系，然后指出其中的矛盾。显然我们不妨只考虑 $x<y$ 之情形。

4.1 两种情况

结论 1 若 x 为 1，则 (1) 不能成立。

证 令 $x=1,\ z=(y+1)+t,\ t\geq 0$ 为整数，则 (1) 化为 $1+y^p=\langle(y+1)+t\rangle^p$. 显然，这是一个不能成立的式子。本结论证毕。

令 x, y, z 为两两互素的正整数，且令

$$\Psi(p,x,y)=\frac{(x+y)^p-(x^p+y^p)}{(x+y)pxy}, \tag{2}$$

则由定理 8 有

$$(x+y,\ xy)=(x+y,\ \Psi(p,x,y))=(xy,\ \Psi(p,x,y))=1; \tag{3}$$

$(x+y,\ p)=1$时 (1)可化为

$$(x+y)\langle(x+y)^{p-1}-pxy\Psi(p,x,y)\rangle=z^p, \tag{4}$$

且由定理 8 有

$$(x+y,\ (x+y)^{p-1}-pxy\Psi(p,x,y))=1; \tag{5}$$

$(x+y,\ p)=p$ 时 (1) 还可化为

$$p(x+y)\left\langle\frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\Psi(p,x,y)\right\rangle=z^p, \tag{6}$$

且由定理 8 有

$$\left(p(x+y),\ \frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\Psi(p,x,y)\right)=1. \tag{7}$$

由(4),(5),(6),(7)显见，应分以下两种情况进行讨论：

情况 I: $(x+y,\ p)=1;$

情况 II: $(x+y,\ p)=p.$

令

$$z=(x+y)-h, \tag{8}$$

h为正整数，于是(1)化为

$$x^p+y^p=\langle(x+y)-h\rangle^p. \tag{9}$$

展开(9)，且注意到(2)可化为 $(x+y)^p-(x^p+y^p)=(x+y)pxy\Psi(p,x,y)$，有

$$h^p-\binom{p}{p-1}(x+y)h^{p-1}+\binom{p}{p-2}(x+y)^2h^{p-2}-\binom{p}{p-3}(x+y)^3h^{p-3}+\cdots$$
$$+\binom{p}{3}(x+y)^{p-3}h^3-\binom{p}{2}(x+y)^{p-2}h^2+\binom{p}{1}(x+y)^{p-1}h-(x+y)pxy\Psi(p,x,y)=0. \tag{10}$$

结论 2 只有当 $(h,\ p)=p$ 而且 $((x+y)xy\Psi(p,x,y),\ p)=p$ 时，(10)才有可能成立且 $(x+y,\ p)=p$，$(xy,\ p)=p$，$(\Psi(p,x,y),\ p)=p$ 不能同时有其二，或同时有其三。

证 除左第一项外，(10)各项明显含有因子 p，若 $(h,\ p)=1$，除以 p，左第一项化为分数，而$(h,\ p)=p$时，若$((x+y)xy\Psi(p,x,y),\ p)=1$，除以 p^2，左最后一项将化为分数**，**显见第一命题为真；再由(3)知第二命题为真。本结论证毕。

4.2 三个模型

由结论 2 易见，应建立三个模型，分别讨论：

第一模型： $(xy,\ p)=p,$

第二模型： $(x+y,\ p)=p,$

第三模型： $(\Psi(p,x,y),\ p)=p.$

已显然，或见于下文，第一模型及第三模型在**情况** I 内，第二模型在**情况** II 内。而且将由(42)看出第二模型含$(z,\ p)=p.$

结论 3 只有当h只在$(x+y)pxy\Psi(p,x.y)$内选择因子时，(10)才有可能成立。

证 除左最后一项外，(10)各项明显含有因子h，显然，只有最后一项亦以 h因子，即 $\dfrac{(x+y)pxy\Psi(p,x,y)}{h}$ 为整数，(10)才有可能成立。而显然，只有当 h只在$(x+y)pxy\Psi(p,x.y)$内得到因子时，$\dfrac{(x+y)pxy\Psi(p,x,y)}{h}$ 才有可能为整数。本结论证毕。

结论 4 对于**情况 I**， 1. 只有当

$$(h,\ x+y)=(x+y)^{1/p} \tag{11}$$

时，(10)才有可能成立；2. 令 k,m为正整数且分别表示 $xy\Psi(p,x,y)$和h所含因子p之最高指数，即 $p^k\in xy\Psi(p,x,y)$ 且 $\left(\dfrac{xy\Psi(p,x,y)}{p^k},\ p\right)=1$，$p^m\in h$ 且$\left(\dfrac{h}{p^m},\ p\right)=1$，则只有当$k=m$时，(10)才有可能成立。 **证** 除以$(x+y)$，(10)化为

$$\frac{h^p}{x+y}-\binom{p}{p-1}h^{p-1}+\binom{p}{p-2}(x+y)h^{p-2}-\binom{p}{p-3}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots$$
$$+\binom{p}{3}(x+y)^{p-4}h^3-\binom{p}{2}(x+y)^{p-3}h^2+\binom{p}{1}(x+y)^{p-2}h-pxy\Psi(p,x,y)=0. \tag{12}$$

易见只有左第一项亦为整数，(12)才有可能成立，而显然只有$(h,\ x+y)\neq 1$，左第一项才有可能为整数。本情况有$(x+y,\ pxy\Psi(p,x,y))=1$，所以(12)左最后一项不再含有$(x+y)$之任何素因子，而由 $(h,\ x+y)\neq 1$知(12)左第二项必含$(x+y)$之某些素因子且左第三项至

倒数第二项明显含$(x+y)$之全部因子，于是，若$\left(\frac{h^p}{x+y}，x+y\right)=t\neq 1,$ 除以 t的一个素因子t_1，(12)左最后一项将化为分数。无疑，只有$\left(\frac{h^p}{x+y}，x+y\right)=1,$ (12)才有可能成立。而由(5)知本情况 $x+y$为一个p次幂是(4)成立的必要条件，所以 $\left(\frac{h^p}{x+y}，x+y\right)=1$ 可写为$\left(\left\langle\frac{h}{(x+y)^{1/p}}\right\rangle^p，\left\langle(x+y)^{1/p}\right\rangle^p\right)=1$ 且由此有$\left(\frac{h}{(x+y)^{1/p}}，(x+y)^{1/p}\right)=1,$ $\left(h，(x+y)^{2/p}\right)=(x+y)^{1/p}$，于是显见第一命题为真；若 $k>m,$ 除以p^{m+2}，(12)左倒数第二项化为分数；若 $k<m,$ 除以p^{m+1}，(12)左最后一项化为分数**,** 显见第二命题为真。本结论证毕。

结论 5　对于**情况 II**, 只有当

$$\left(h,\ p(x+y)\right)=\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p} \tag{13}$$

时，(10)才有可能成立。 **证**　除以$p(x+y),$ (10)化为

$$\frac{h^p}{p(x+y)}-\frac{\binom{p}{p-1}}{p}h^{p-1}+\frac{\binom{p}{p-2}}{p}(x+y)h^{p-2}-\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots$$

$$+\frac{\binom{p}{3}}{p}(x+y)^{p-4}h^3-\frac{\binom{p}{2}}{p}(x+y)^{p-3}h^2+\frac{\binom{p}{1}}{p}(x+y)^{p-2}h-xy\Psi(p,x,y)=0. \tag{14}$$

注意到p为奇素数，$\binom{p}{k}/p$一定为整数，显见除左第一项外，(14)各项皆为整数。于是显然，只有左第一项亦为整数，(14)才有可能成立。而只有$\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1,$ 左第一项才有可能为整数。本情况有$\left(p(x+y),\ xy\Psi(p,x,y)\right)=1,$ 所以(14)左最后一项不再含$p(x+y)$之任何素因子，而由$\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1$ 知左第二项必含$p(x+y)$之某些素因子，且左第三项至倒数第二项明显含有$p(x+y)$之全部因子，若$\left(\frac{h^p}{p(x+y)}，p(x+y)\right)=t\neq 1,$ 除以t的一个素因子 t_1，左最后一项将化为分数。显然只有$\left(\frac{h^p}{p(x+y)}，p(x+y)\right)=1,$ (14))才有可能成立。由(7)知本情况 $p(x+y)$为一个 p次幂是(6)成立的必要条件**,** 所以 $\left(\frac{h^p}{p(x+y)}，p(x+y)\right)=1$ 可写为$\left(\left\langle\frac{h}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}\right\rangle^p，\left\langle\langle p(x+y)\rangle^{1/p}\right\rangle^p\right)=1$ 且由此易见有 $\left(\frac{h}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}，\langle p(x+y)\rangle^{1/p}\right)=1,$ $\left(h,\ \langle p(x+y)\rangle^{2/p}\right)=\langle p(x+y)\rangle^{1/p}$，由此显见本结论成立。本结论证毕。

为揭示 x,y,z,h之间的关系，令

$$x=z-r, \tag{15}$$

$$y=z-s, \tag{16}$$

r,s为正整数。于是(1),(9)化为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=z^p, \tag{17}$$

$$(z-r)^p+(z-s)^p=\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle-h\}^p. \tag{18}$$

由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$ 易见(17)可写为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle\}^p. \tag{19}$$

由(18),(19)有

$$h=z-(r+s), \tag{20}$$

$$z-r=s+h, \tag{21}$$

$$z-s=r+h, \tag{22}$$

$$z=r+s+h. \tag{23}$$

于是(17)又可写为

$$(s+h)^p+(r+h)^p=(r+s+h)^p. \tag{24}$$

关于奇偶性的一点注记：易见，不论 r,s 一奇一偶还是 r,s 皆为奇，都是只有 h 为偶，(24)才有可能成立。于是显见若 r,s 一奇一偶，则 $r+s+h$ 为奇，即 z 为奇；若 r,s 皆为奇，则 $r+s+h$ 为偶，即 z 为偶。由(3)有 $(\Psi(p,x,y),\ xy(x+y))=1,$ 因 $xy(x+y)$ 总为偶，显见 $\Psi(p,x,y)$ 只能为奇。文中有 $\omega\in\Psi(p,x,y),$ 于是显然 ω 为奇。文中还在 $(T,\ D)=1$ 的条件下引出 $\Psi(p,T,D),$ 同理 $\Psi(p,T,D)$ 亦只能为奇。

展开(17)有

$$\begin{aligned}&z^p-\binom{p}{1}(r+s)z^{p-1}+\binom{p}{2}(r^2+s^2)z^{p-2}-\binom{p}{3}(r^3+s^3)z^{p-3}+\cdots\\&+\binom{p}{p-3}(r^{p-3}+s^{p-3})z^3-\binom{p}{p-2}(r^{p-2}+s^{p-2})z^2+\binom{p}{p-1}(r^{p-1}+s^{p-1})z-(r^p+s^p)=0.\end{aligned} \tag{25}$$

结论 6　对(17)之讨论，只考虑 z,r,s 三者两两互素之情形则可。

证　由(3),(15),(16)有

$$(z-r,\ z-s)=(z-r,\ z)=(z-s,\ z)=1.$$

首先注意到，只有当 $(z,\ r)=1$ 时，$(z-r,\ z)=1$ 才有可能成立，因如若 $(z,\ r)=t\neq1,$ 则一定有 $(z-r,\ z)=t\neq1,$ 与 $(z-r,\ z)=1$ 相悖。同理，只有当 $(z,\ s)=1$ 时，$(z-s,\ z)=1$ 才有可能成立。且易见当 $(z,\ rs)=1$ 时，只有 $(r,\ s)=1,$ (25)才有可能成立。因如若 $(r,\ s)=t\neq1,$ 除左第一项外，(25)各项均含因子 $t,$ 除以 $t,$ 左第一项将化为分数。本结论证毕。

由定理 8, 且注意到 $(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle,$ 易见(17)亦可写为

$$\langle(z-r)+(z-s)\rangle\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\}=z^p, \tag{26}$$

$$\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}(\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s))=z^p, \tag{27}$$

$((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时，还可写为

$$p\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}\left(\frac{\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=z^p; \tag{28}$$

且 $((z-r)+(z-s),\ p)=1$ 时有

$$\left(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ \ \{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1, \tag{29}$$

$((z-r)+(z-s),\ \ p)=p$ 时有

$$\left(p\{z+\langle z-(r+s)\rangle\},\ \ \frac{\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{30}$$

结论 7　对于**情况 I**, 即 $((z-r)+(z-s),\ \ p)=1$ 时，只有当 A,B,q,α 为正整数， $q>1$,

$$z=qA, \tag{31}$$

$$r+s=qB, \tag{32}$$

$$(A,\ \ B)=1, \tag{33}$$

$$h=q(A-B), \tag{34}$$

$$(q,\ \ A(A-B))=1, \tag{35}$$

$$(z-r)+(z-s)=q^{p}, \tag{36}$$

$$(h,\ \ (z-r)+(z-s))=q \tag{37}$$

时，(27)才有可能成立且 r,s 一奇一偶时， A,B,q 为奇且 $(B,\ \ q)=1$; r,s 皆为奇时， A 为奇， B,q 为偶且 $B=2B_1$， B_1 为奇，若令 $q=2^{\alpha}q_1$， q_1 为奇，则有 $(B_1\ \ q_1)=1$.

证　1. 易见只有 $(z,\ \ r+s)\neq 1$, (27)才有可能成立。因为如若 $(z,\ \ r+s)=1$, 由定理 1 有 $(z-(r+s),\ \ z)=1$, $(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ \ z)=1$, (27)左出现与右互素之因子。注意到(29), 显然只有令 A,B,q 为正整数， $(z,\ \ r+s)=q\neq 1$, $z=qA$, $r+s=qB$, $(A,\ \ B)=1$, (27)才有可能成立。于是显然，(27),(29)化为

$$\langle A+(A-B)\rangle\left\{q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right\}=q^{p-1}A^{p}, \tag{38}$$

$$\left(q\langle A+(A-B)\rangle,\ \ q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{39}$$

2. 由(39)有 $\left(A+(A-B),\ \ q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1$ 以及 $\left(q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s),\ \ q^{p-1}\right)=1$ 且由 $(A,\ \ B)=1$ 以及定理 1 有 $(A-B,\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A^{p})=1$, 于是由定理 5 显见只有当

$$A+(A-B)=q^{p-1}, \tag{40}$$

$$q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)=A^{p} \tag{41}$$

时(38)才有可能成立;

3. 而由 $(A,\ \ B)=1$ 及定理 1 有 $(A-B,\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A(A-B))=1$, 于是不难看出只有 $(q^{p-1},\ \ A(A-B))=1$, 亦即只有(35)成立，(40)才有可能成立。

4. 由(31),(32)易见(20)可化为(34); 由(31),(32),(40)及 $(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle$ 易见(36)成立；由(34),(35),(36),(15),(16)易见(11)可写为(37).

5. 由关于奇偶性的一点注记知，若 r,s 一奇一偶，则 z 为奇，于是由(31),(32)知 A,B,q 一定为奇。(40)可写为 $2A-B=q^{p-1}$ (40-1). 因 q 为奇且由(35)知 $(A,\ \ q)=1$, 显见只有当

$(B,\ q)=1$时，(40-1)才有可能成立；若r,s皆为奇，则x,y为奇，$x+y$为偶，于是由(36)知q一定为偶，再由(35)知A一定为奇。令 $q=2^{\alpha}q_1$， q_1为奇，(40-1)化为 $2A-B=\left(2^{\alpha}q_1\right)^{p-1}$ (40-2). 因A为奇，显然，只有$B=2B_1$， B_1为奇时，(40-2)才有可能成立，于是(40-2)可化为 $A-B_1=2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}$ (40-3). 由$(A,\ q)=1$, 有$(A,\ q_1)=1$, 显然，只有当 $(B_1,\ q_1)=1$ 时(40-3)才有可能成立。本结论证毕。

结论 8　对于**情况 II**, 即$((z-r)+(z-s),\ p)=p$时，只有当A,B,q,θ,α 为正整数**,**

$$z=q\,p^{\theta}A, \tag{42}$$

$$r+s=q\,p^{\theta}B, \tag{43}$$

$$(q,\ p)=1, \tag{44}$$

$$(A,\ B)=1, \tag{45}$$

$$h=q\,p^{\theta}(A-B), \tag{46}$$

$$\left(q\,p^{\theta},\ A(A-B)\right)=1, \tag{47}$$

$$(z-r)+(z-s)=q^{p}\,p^{p\theta-1}, \tag{48}$$

$$\left(h,\ p\langle(z-r)+(z-s)\rangle\right)=q\,p^{\theta} \tag{49}$$

时，(27),(28)才有可能成立且r,s一奇一偶时，A,B,q为奇，$(B,\ q\,p^{\theta})=1$; r,s皆为奇时，A为奇，B,q为偶且$B=2B_1$， B_1为奇，若令 $q=2^{\alpha}q_1$， q_1为奇，则有$(B_1,\ q_1\,p^{\theta})=1$.

证 1. 观察(27), 与**情况 I** 同理，本情况亦只有$(z,\ r+s)\neq 1$, (27)才有可能成立，否则亦会出现左右因子互素之情况；本情况还须有$(z,\ p)=p$, 否则，(27)将左含因子p, 右不含因子p; 且不难看出，本情况还须有$(r+s,\ p)=p$, 否则，若$(z,\ p)=p$, 而 $(r+s,\ p)=1$, 由定理 4 有$(z-(r+s),\ p)=1$及$(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ p)=1$, 亦即有$((z-r)+(z-s),\ p)=1$, 与$((z-r)+(z-s),\ p)=p$相悖。显然只有令$A,B,q,\theta$为正整数**,** $(z,\ r+s)=q\,p^{\theta}$， $z=q\,p^{\theta}A$, $r+s=q\,p^{\theta}B$, $(q,\ p)=1$, $(A,\ B)=1$, (27)才有可能成立。于是(28)和(30)分别化为

$$\langle A+(A-B)\rangle\left\{q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right\}=q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}A^{p}, \tag{50}$$

$$\left(q\,p^{\theta+1}\langle A+(A-B)\rangle,\ q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{51}$$

2. 由(51)有$\left(A+(A-B),\ q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1$ 及$\left(q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s),\ q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\right)=1$, 且由$(A,\ B)=1$及定理 1 有$(A-B,\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A^{p})=1$, 于是由定理 5 知只有当

$$A+(A-B)=q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}, \tag{52}$$

$$q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)=A^{p} \tag{53}$$

时(50)才有可能成立。

3. 而由$(A,\ B)=1$及定理 1 有$(A-B,\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A(A-B))=1$, 于是不难看出只有$\left(q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1},\ A(A-B)\right)=1$, 亦即(47)成立，(52)才有可能成立。

4. 由(42),(43)易见(20)可化为(46); 由(42),(43),(52)及$\left(z-r\right)+\left(z-s\right)=z+\left\langle z-\left(r+s\right)\right\rangle$易见(48)成立；由(46),(47),(48),(15),(16)易见(13)可写为(49).

5. 由关于奇偶性的一点注记知，若 r,s 一奇一偶，则 z 为奇，由(42),(43)知 A,B,q 一定为奇。(52)可写为 $2A-B=q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}$ (52-1). 因 q 为奇且由(47)有 $\left(A,\ q\,p^{\theta}\right)=1$, 显然只有 $\left(B,\ q\,p^{\theta}\right)=1$, (52-1)才有可能成立；若 r,s 为奇，则 x,y 为奇，$x+y$ 为偶，由(48)知 q 为偶，再由(47)知 A 为奇。令 $q=2^{\alpha}q_1$, q_1 为奇，(52-1)可写为 $2A-B=2^{(p-1)\alpha}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}$ (52-2). 因为 A 为奇，显然，只有 $B=2B_1$, B_1 为奇，(52-2)才有可能成立。于是(52-2)化为

$A-B_1=2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}$ (52-3). 因 $\left(A,\ q_1\,p^{\theta}\right)=1$ 且 A 为奇，显然只有 $\left(B_1,\ q_1\,p^{\theta}\right)=1$, (52-3)才有可能成立。本结论证毕。

(17)可写为

$$z^p-\left(z-r\right)^p=\left(z-s\right)^p, \tag{54}$$

$$z^p-\left(z-s\right)^p=\left(z-r\right)^p. \tag{55}$$

由定理 8 之减法形式易见(54),(55)可化为

$$\left\langle z-\left(z-r\right)\right\rangle\left\{\left\langle z-\left(z-r\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-r\right)\Psi\left(p,z,-\left(z-r\right)\right)\right\}=\left(z-s\right)^p, \tag{56}$$

$$\left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle\left\{\left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-s\right)\Psi\left(p,z,-\left(z-s\right)\right)\right\}=\left(z-r\right)^p. \tag{57}$$

展开(24)有

$$\begin{aligned}&h^p-\tbinom{p}{p-2}\left\langle\left(r+s\right)^2-\left(r^2+s^2\right)\right\rangle h^{p-2}-\tbinom{p}{p-3}\left\langle\left(r+s\right)^3-\left(r^3+s^3\right)\right\rangle h^{p-3}-\cdots\\&-\tbinom{p}{3}\left\langle\left(r+s\right)^{p-3}-\left(r^{p-3}+s^{p-3}\right)\right\rangle h^3-\tbinom{p}{2}\left\langle\left(r+s\right)^{p-2}-\left(r^{p-2}+s^{p-2}\right)\right\rangle h^2\\&-\tbinom{p}{1}\left\langle\left(r+s\right)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)\right\rangle h-\left\langle\left(r+s\right)^p-\left(r^p+s^p\right)\right\rangle=0.\end{aligned} \tag{58}$$

除以 prs, (58)可化为

$$\begin{aligned}&\frac{h^p}{prs}-2\frac{\binom{p}{p-2}}{p}h^{p-2}-3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}\left(r+s\right)h^{p-3}-\cdots-\frac{\binom{p}{3}\left\langle\left(r+s\right)^{p-3}-\left(r^{p-3}+s^{p-3}\right)\right\rangle}{prs}h^3\\&-\frac{\binom{p}{2}\left\langle\left(r+s\right)^{p-2}-\left(r^{p-2}+s^{p-2}\right)\right\rangle}{prs}h^2-\frac{\left(r+s\right)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h-\left(r+s\right)\Psi\left(p,r,s\right)=0.\end{aligned} \tag{59}$$

结论 9 $p>3$ 时，若得到 $\dfrac{h^p}{prs}=r+s+2h$ 或 $\dfrac{h^p}{prs}=\dfrac{r+s+2h}{p}$, 则(59)不能成立。

证 因为 r,s,h 为正整数，所以有 $\left(r+h\right)+2h\le 2h\left(r+h\right)$. 于是显见 $p>3$ 时有

$$r+s+2h\le 2h\left(r+s\right)<3\left(r+s\right)h<3\left(r+s\right)h^{p-3}<3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}\left(r+s\right)h^{p-3},$$

所以，若得到 $\dfrac{h^p}{prs}=r+s+2h$ 或 $\dfrac{h^p}{prs}=\dfrac{r+s+2h}{p}$, 则有 $\dfrac{h^p}{prs}<3\dfrac{\binom{p}{p-3}}{p}\left(r+s\right)h^{p-3}$, 显然，此时(59)左＜０. 本结论证毕。

第一模型

因$(x,\ y)=1$, 所以$(xy,\ p)=p$ 即$(x,\ p)=p$ 或$(y,\ p)=p$. 又因 x,y在(1)中对称，所以讨论其一则可。这里，我们讨论$(y,\ p)=p$. 由(3)易见本模型有

$$(pxy,\ (x+y)\Psi(p.x,y))=1, \tag{60}$$

显然本模型在**情况 I** 内。

结论 10　令T,D,θ,ω为正整数，ω为$\Psi(p,x,y)$之因子且$p>3$时有 $\omega>1$, 则只有当

$$r=p^{p\theta-1}T^{p}, \tag{61}$$

$$s=D^{p}, \tag{62}$$

$$h=q\,p^{\theta}TD\omega, \tag{63}$$

T,D,p,q,ω两两互素时，(17)才有可能成立。

证 1. 本模型$(z-s,\ p)=p$, 显然只有$(z-(z-r),\ p)=p$, (56)才有可能成立，因如若$(z-(z-r),\ p)=1$, 由定理8有 $\left(\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r)),\ p\right)=1$, (56)左与 p 互素，右却以p为因子。$(z-(z-r),\ p)=p$ 时，(56)可写为

$$p\langle z-(z-r)\rangle\left\{\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p}+z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\}=(z-s)^{p}, \tag{64}$$

且由定理8有$\left(p\langle z-(z-r)\rangle,\ \left\{\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p}+z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\}\right)=1$. 显然，由定理5, 只有令$T,D,\theta$为正整数，

$$p\langle z-(z-r)\rangle=\left(p^{\theta}T\right)^{p}, \tag{65}$$

$$\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p}+z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))=N^{p}, \tag{66}$$

$$z-s=p^{\theta}TN, \tag{67}$$

$$(T,\ N)=1, \tag{68}$$

$$(TN,\ p)=1, \tag{69}$$

(56)才有可能成立。易见(65)可化为(61).

2.　观察(57), 由$(z,\ z-s)=1$ 及定理1有$(z-(z-s),\ z(z-s))=1$, 又因$(z-s,\ p)=p$, 所以有$(z-(z-s),\ p)=1$, 再由定理8有 $\left(\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z,-(z-s)),\ p\right)=1$ 及$\left(z-(z-s),\ \langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s))\right)=1$, 注意到 $(z-r,\ z-s)=1$ 及本模型有$(z-r,\ p)=1$, 由定理5显见，只有令D,E为正整数，

$$z-(z-s)=D^{p}, \tag{70}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s))=E^{p}, \tag{71}$$

$$z-r=DE, \tag{72}$$

$$(D,\ E)=1, \tag{73}$$

$$(DE,\ p^{\theta}TN)=1, \tag{74}$$

(57)才有可能成立。易见(70)可化为(62).

3. 已证(61),(62)成立，由此二式及(72),(67)有

$$z - p^{p\theta-1}T^p = DE, \tag{75}$$

$$z - D^p = p^\theta TN, \tag{76}$$

且由此有 $DE + p^{p\theta-1}T^p = D^p + p^\theta TN$, $DE - D^p = p^\theta TN - p^{p\theta-1}T^p$ 及

$$D\left(E - D^{p-1}\right) = p^\theta T\left(N - p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}\right). \tag{77}$$

由(73)有 $\left(E,\ D^{p-1}\right)=1$, 由结论 1 有 $x \neq 1$, 再由(15),(72)知有 $E\,D^{p-1} \neq 1$, 于是由定理 7 有 $E - D^{p-1} \neq 0$, 又因 $p^\theta T \neq 0$, 显然(77)可写为

$$\frac{D}{p^\theta T} = \frac{N - p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}}{E - D^{p-1}}. \tag{78}$$

由(74)有 $\left(D,\ p^\theta T\right)=1$, 按定理 6 对 (78) 做 U 变换，令 $U \neq 0$ 为整数，

$$N - p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1} = UD, \tag{79}$$

$$E - D^{p-1} = U\,p^\theta T, \tag{80}$$

于是有 $N = p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1} + UD$, $E = D^{p-1} + U\,p^\theta T$, 再由(72),(67)易见有

$$z - r = D^p + U\,p^\theta TD, \tag{81}$$

$$z - s = p^{p\theta-1}T^p + U\,p^\theta TD, \tag{82}$$

再由(61),(62)有

$$z = p^{p\theta-1}T^p + D^p + U\,p^\theta TD. \tag{83}$$

由(61),(62),(83)易见(20)可写为

$$h = U\,p^\theta TD, \tag{84}$$

且因 $h > 0$, $p^\theta TD > 0$, 显然须有 $U > 0$.

4. 注意到，由(68),(69)有 $\left(N,\ pT\right)=1$, 由此有 $\left(N,\ p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}\right)=1$, 再由定理 1 有 $\left(N - p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1},\ NTp\right)=1$, 再由(79)有

$$\left(UD,\ NTp\right)=1. \tag{85}$$

由(73)有 $\left(E,\ D^{p-1}\right)=1$, 再由定理 1 有 $\left(E - D^{p-1},\ DE\right)=1$, 再由(80)有

$$\left(U\,p^\theta T,\ DE\right)=1. \tag{86}$$

由(85),(86)有

$$\left(U,\ DE\,p^\theta TN\right)=1. \tag{87}$$

由(69)及(85),(86)有 T, D, p, U 两两互素。

5. 观察(84), 我们依据结论 3 讨论U之因子，以确定h之因式结构。

1). 由(87),(72),(67),(15),(16)有 $\left(U,\ pxy\right)=1$.

2). 由(37),(15),(16)有$\left(h,\ x+y\right)=q$, 且易见 $q \in U$. 这是因为，由(72),(67),(15),(16)有 $p^\theta TD \in pxy$, 而 $q \in x+y$, 于是由(60)有 $\left(q,\ p^\theta TD\right)=1$.

3). 若 h不从$\Psi\left(p,x,y\right)$得到因子，只能是$U = q$, $h = q\,p^\theta TD$, 由此以及(61),(62)易得

$\dfrac{h^p}{prs}=q^p$，即 $\dfrac{h^p}{prs}=r+s+2h$（由(21),(22)知(36)即$(s+h)+(r+h)=q^p$，即 $r+s+2h=q^p$），于是由结论 9 知若 $p>3$，(59)不能成立。令 h 从 $\Psi(p,x,y)$得到因子ω，且 $p>3$ 时有 $\omega>1$. 因已有 $p^\theta TD\in pxy$，而 $\omega\in\Psi(p,x,y)$，由(60)有 $(p^\theta TD,\ \omega)=1$，显然 $\omega\in U$. 至此有

$$U=q\omega, \tag{88}$$

且(84)随之化为(63).

4). 观察(88)，因为 $\omega\in\Psi(p,x,y)$，而 $q\in x+y$，由(3)知 $(q,\ \omega)=1$. 因已得 T,D,p,U 两两互素，至此显然有 T,D,p,q,ω 两两互素。本结论证毕。

结论 11 本模型，(32)与其以后的结果相悖。

证 由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$, (31),(36),(20),(63)有 $A=q^{p-1}-p^\theta TD\omega$；另由(34),(63)有 $A-B=p^\theta TD\omega$，即 $B=A-q\,p^\theta TD\omega$，于是显然有

$$B=q^{p-1}-2\,p^\theta TD\omega. \tag{89}$$

观察(32)，由(61),(62)知其可写为

$$p^{p\theta-1}T^p+D^p=qB. \tag{90}$$

将(89)代入(90)有 $p^{p\theta-1}T^p+D^p=q\left(q^{p-1}-2\,p^\theta TD\omega\right)$， 由此得出

$$q^p-D^p=p^{p\theta-1}T^p+2q\,p^\theta TD\omega. \tag{91}$$

1. 若 r,s 一奇一偶：1). 若 T 为偶，令 $T=2^\kappa T_1$，T_1 为奇，κ 为正整数，(91)化为

$$q^p-D^p=2^{p\kappa}p^{p\theta-1}T_1^p+2^{\kappa+1}q\,p^\theta T_1D\omega, \tag{92}$$

分解后化为

$$(q-D)\left\langle(q-D)^{p-1}+pqD\Psi(p,q,-D)\right\rangle=2^{\kappa+1}p^\theta T_1\left\langle 2^{(p-1)\kappa-1}p^{(p-1)\theta-1}T_1^{p-1}+qD\omega\right\rangle. \tag{93}$$

由结论 10 知此时有 $2,p,T_1,D,q,\omega$ 两两互素，于是有$\left(2^{(p-1)\kappa-1}p^{(p-1)\theta-1}T_1^{p-1},\ qD\omega\right)=1$，再由定理 1 有$\left(2^{(p-1)\kappa-1}p^{(p-1)\theta-1}T_1^{p-1}+qD\omega,\ 2^{\kappa+1}p^\theta T_1\right)=1$. 而由定理 8 知，若 $(q-D,\ p)=1$，有$\left((q-D)^{p-1}+pqD\Psi(p,q,-D),\ p\right)=1$. 显然，此时(93)右以 p 为因子，而左与 p 互素，一定不能成立；若 $(q-D,\ p)=p$，(93)化为

$$p(q-D)\left\langle\frac{(q-D)^{p-1}}{p}+qD\Psi(p,q,-D)\right\rangle=2^{\kappa+1}p^\theta T_1\left\langle 2^{(p-1)\kappa-1}p^{(p-1)\theta-1}T_1^{p-1}+qD\omega\right\rangle, \tag{93-1}$$

且有$\left(p(q-D),\ \dfrac{(q-D)^{p-1}}{p}+qD\Psi(p,,q,-D)\right)=1$. 不难看出，只有令 $q-D=2^{\kappa+1}p^{\theta-1}T_1$，即 $q=2^{\kappa+1}p^{\theta-1}T_1+D$，(93-1)左才能化为其一亦为 $2^{\kappa+1}p^\theta T_1$ 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$2^{\kappa+1}p^\theta T_1\left\langle 2^{(p-1)(\kappa+1)}p^{(p-1)(\theta-1)-1}T_1^{p-1}+qD\Psi(p,q,-D)\right\rangle=2^{\kappa+1}p^\theta T_1\left\langle 2^{(p-1)\kappa-1}p^{(p-1)\theta-1}T_1^{p-1}+qD\omega\right\rangle.$$

然而，这样做，q 的值被缩小了。令 $q=2^{\kappa+1}p^\xi T_1+D$，可证有 $\xi>\theta-1$.

i. 由(61)有 $(pr)^{1/p}=p^\theta T$，由 $T=2^\kappa T_1$，有 $(pr)^{1/p}=2^\kappa p^\theta T_1$，由此有 $2^\kappa T_1=\dfrac{(pr)^{1/p}}{p^\theta}$；ii. 由(36),(15),(16)有 $q=(x+y)^{1/p}$；iii. 由(62)有 $D=s^{1/p}$. 上三式代入 $q=2^{\kappa+1}p^\xi T_1+D$,

易见有 $(x+y)^{1/p}=2\dfrac{(pr)^{1/p}}{p^{\theta}}p^{\xi}+s^{1/p}$， $p^{\xi}=\dfrac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{2(pr)^{1/p}}p^{\theta}$， $\xi\ln p=\ln\dfrac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{2(pr)^{1/p}}+\theta\ln p,$

$\xi=\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{2(pr)^{1/p}}+\theta,$ $\xi=\theta-\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{2(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}.$ 证出 $\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{2(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}<1$ 即可。令 $y/x=k$，将定理 9 之(3),(4),(5)代入该式，该式化为定理 9 之(7)，已证。

2). 若 D 为偶，令 $D=2^{\nu}D_1$， D_1 为奇， ν 为正整数，(91)化为

$$q^{p}-(2^{\nu}D_1)^{p}=p^{p\theta-1}T^{p}+2^{\nu+1}q\,p^{\theta}T\,D_1\omega, \tag{94}$$

分解后化为

$$(q-2^{\nu}D_1)\left\langle(q-2^{\nu}D_1)^{p-1}+2^{\nu}pq\,D_1\Psi(p,q,-2^{\nu}D_1)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\nu+1}q\,D_1\omega\right\rangle. \tag{95}$$

由结论 10 有 $2,p,T,D_1,q,\omega$ 两两互素，于是显然有 $\left(p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1},\ 2^{\nu+1}q\,D_1\omega\right)=1$，再由定理 1 有 $\left(p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\nu+1}q\,D_1\omega,\ p^{\theta}T\right)=1$. 而由定理 8 易见，若 $(q-2^{\nu}D,\ p)=1$，有 $\left((q-2^{\nu}D_1)^{p-1}+2^{\nu}pq\,D_1\Psi(p,q,-2^{\nu}D_1),\ p\right)=1$. 显然，此时(95)右以 p 为因子，而左与 p 互素，一定不能成立；若 $(q-2^{\nu}D_1,\ p)=p$，(95)化为

$$p(q-2^{\nu}D_1)\left\langle\frac{(q-2^{\nu}D_1)^{p-1}}{p}+2^{\nu}q\,D_1\Psi(p,q,-2^{\nu}D_1)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\nu+1}D_1\omega\right\rangle, \tag{95-1}$$

且有 $\left(p(q-2^{\nu}D_1),\ \dfrac{(q-2^{\nu}D_1)^{p-1}}{p}+2^{\nu}q\,D_1\Psi(p,q,-2^{\nu}D_1)\right)=1$. 比较两端，不难看出，只有令 $q-2^{\nu}D_1=p^{\theta-1}T$，即 $q=p^{\theta-1}T+2^{\nu}D_1$，(95-1)左才能化为其一亦为 $p^{\theta}T$ 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)(\theta-1)-1}T^{p-1}+2^{\nu}q\,D_1\Psi(p,q,-2^{\nu}D_1)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\nu+1}q\,D_1\omega\right\rangle.$$

然而，这样做， q 的值被缩小了。令 $q=p^{\zeta}T+2^{\nu}D_1$，可证有 $\xi>\theta-1$.

i. 由(61)有 $(pr)^{1/p}=p^{\theta}T$，即 $T=\dfrac{(pr)^{1/p}}{p^{\theta}}$；ii. 由(36),(15),(16) 有 $q=(x+y)^{1/p}$；iii. 由(62)有 $D=s^{1/p}$，再由 $D=2^{\nu}D_1$ 有 $2^{\nu}D_1=s^{1/p}$. 将上三式代入 $q=p^{\zeta}T+2^{\nu}D_1$，易见有

$$(x+y)^{1/p}=p^{\xi}\frac{(pr)^{1/p}}{p^{\theta}}+s^{1/p},\quad p^{\xi}=\frac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{2(pr)^{1/p}}p^{\theta},\quad \xi\ln p=\ln\frac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{(pr)^{1/p}}+\theta\ln p,$$

$\xi=\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{(pr)^{1/p}}+\theta,$ $\xi=\theta-\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}.$ 证出 $\dfrac{1}{\ln p}\ln\dfrac{(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}<1$ 即可。令 $y/x=k$，将定理 9 之(3),(4),(5)代入该式，该式化为定理 9 之(9)，已证。

2. 若 r,s 皆为奇，则 q 为偶，令 $q=2^{\alpha}q_1$， q_1 为奇， α 为正整数，(91)化为

$$(2^{\alpha}q_1)^{p}-D^{p}=p^{p\theta-1}T^{p}+2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}TD\omega, \tag{96}$$

分解后化为

$$(2^{\alpha}q_1-D)\left\langle(2^{\alpha}q_1-D)^{p-1}+p\,2^{\alpha}q_1D\Psi(p,2^{\alpha}q_1,-D)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\alpha+1}q_1D\omega\right\rangle. \tag{97}$$

由结论 10 有 $2,p,T,D,q_1,\omega$ 两两互素，于是显然有 $\left(p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1},\ 2^{\alpha+1}q_1D\omega\right)=1$，再由

定理 1 有 $\left(p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\alpha+1}q_1 D\omega,\ p^{\theta}T\right)=1$. 而由定理 8 易见，若 $\left(2^{\alpha}q_1-D,\ p\right)=1$, 则有 $\left(\left(2^{\alpha}q_1-D\right)^{p-1}+2^{\alpha}pq_1D\Psi\left(p,2^{\alpha}q_1,-D\right),\ p\right)=1$. 此时(97)右以 p 为因子，而左与 p 互素，一定不能成立；若 $\left(2^{\alpha}q_1-D,\ p\right)=p$, (97)化为

$$p\left(2^{\alpha}q_1-D\right)\left\langle\frac{\left(2^{\alpha}q_1-D\right)^{p-1}}{p}+2^{\alpha}q_1D\Psi\left(p,2^{\alpha}q_1,-D\right)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\alpha+1}q_1D\omega\right\rangle, \quad (97\text{-}1)$$

且有 $\left(p\left(2^{\alpha}q_1-D\right),\ \frac{\left(2^{\alpha}q_1-D\right)^{p-1}}{p}+2^{\alpha}q_1D\Psi\left(p,2^{\alpha}q_1,-D\right)\right)=1$. 比较两端，不难看出，只有令 $2^{\alpha}q_1-D=p^{\theta-1}T$, 即 $2^{\alpha}q_1=p^{\theta-1}T+D$, (97-1)左才能化为其一亦为 $p^{\theta}T$ 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)(\theta-1)-1}T^{p-1}+2^{\alpha}q_1D\Psi\left(p,2^{\alpha}q_1,-D\right)\right\rangle=p^{\theta}T\left\langle p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+2^{\alpha+1}q_1D\omega\right\rangle.$$

然而，这样做，$2^{\alpha}q_1$ 的值被人为地缩小了。令 $2^{\alpha}q_1=p^{\xi}T+D$, 可证有 $\xi>\theta-1$.

i. 由(61)有 $(pr)^{1/p}=p^{\theta}T$, 亦即 $T=\frac{(pr)^{1/p}}{p^{\theta}}$; ii. 由(36),(15),(16)有 $q=(x+y)^{1/p}$, 再由 $q=2^{\alpha}q_1$ 有 $2^{\alpha}q_1=(x+y)^{1/p}$; iii. 由(62)有 $D=s^{1/p}$. 将上三式代入 $2^{\alpha}q_1=p^{\xi}T+D$, 易见有

$$(x+y)^{1/p}=p^{\xi}\frac{(pr)^{1/p}}{p^{\theta}}+s^{1/p},\quad p^{\zeta}=\frac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{(pr)^{1/p}}p^{\theta},\quad \xi\ln p=\ln\frac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{(pr)^{1/p}}+\theta\ln p,$$

$\xi=\frac{1}{\ln p}\ln\frac{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}{(pr)^{1/p}}+\theta$, $\xi=\theta-\frac{1}{\ln p}\ln\frac{(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}$. 证出 $\frac{1}{\ln p}\ln\frac{(pr)^{1/p}}{(x+y)^{1/p}-s^{1/p}}<1$ 即可。令 $y/x=k$, 将定理 9 之(3),(4),(5)代入该式，该式化为定理 9 之(9)， 已证。

本结论证毕。本模型证毕。

第二模型

显然，本模型在**情况 II** 内，而且由(3)有

$$\left(p(x+y),\ xy\Psi(p,x,y)\right)=1. \quad (98)$$

结论 12　令 T,D,θ,ω 为正整数，ω 为 $\Psi(p,x,y)$ 之因子，$p>3$ 时 $\omega>1$, 则只有当

$$r=T^{p}, \quad (99)$$

$$s=D^{p}, \quad (100)$$

$$h=q\,p^{\theta}TD\omega, \quad (101)$$

T,D,p,q,ω 两两互素，(17)才有可能成立。

证　观察(56),(57), 本模型 $(xy,\ p)=1$, 亦即 $\left((z-r)(z-s),\ p\right)=1$, 易见，只有

$$\left(\left\langle z-(z-r)\right\rangle\left\{\left\langle z-(z-r)\right\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi\left(p,z,-(z-r)\right)\right\},\ p\right)=1, \quad (102)$$

(56)才有可能成立；只有

$$\left(\left\langle z-(z-s)\right\rangle\left\{\left\langle z-(z-s)\right\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi\left(p,z,-(z-s)\right)\right\},\ p\right)=1, \quad (103)$$

(57)才有可能成立，否则此二式均将左含因子 p, 而右不含因子 p.

1. 观察(56), 因(102)包含 $\left(z-(z-r),\ p\right)=1$, 由定理 8 有

$$\left(z-(z-r),\ \langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right)=1,$$

注意到$(z-s,\ p)=1$, 由定理 5, 显然，只有令T,N为正整数，

$$z-(z-r)=T^{p}, \tag{104}$$

$$\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))=N^{p}, \tag{105}$$

$$z-s=TN, \tag{106}$$

$$(T,\ N)=1, \tag{107}$$

$$(TN,\ p)=1, \tag{108}$$

(56)才有可能成立。易见(104)可化为(99).

2. 观察(57), 因(103)包含$(z-(z-s),\ p)=1$, 由定理 8 有

$$\left(z-(z-s),\ \langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s))\right)=1,$$

注意到$(z-r,\ z-s)=1$及本模型$(z-r,\ p)=1$, 由定理 5 易见，只有令D,E为正整数，

$$z-(z-s)=D^{p}, \tag{109}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s))=E^{p}, \tag{110}$$

$$z-r=DE, \tag{111}$$

$$(D,\ E)=1, \tag{112}$$

$$(DE,\ p)=1, \tag{113}$$

$$(DE,\ TN)=1, \tag{114}$$

(57)才有可能成立。显然(109)可化为(100).

3. 已证(99),(100)成立，由此二式及(111),(106)有

$$z-T^{p}=DE, \tag{115}$$

$$z-D^{p}=TN, \tag{116}$$

且由此有$DE+T^{p}=D^{p}+TN$, $DE-D^{p}=TN-T^{p}$ 及

$$D\left(E-D^{p-1}\right)=T\left(N-T^{p-1}\right). \tag{117}$$

由(112)有$(E,\ D^{p-1})=1$, 由结论 1 有$x\neq 1$, 再由(15),(111)有 $ED^{p-1}\neq 1$, 于是由定理 7 有$E-D^{p-1}\neq 0$, 又因$T\neq 0$, 显然(117)可写为

$$\frac{D}{T}=\frac{N-T^{p-1}}{E-D^{p-1}}. \tag{118}$$

由(114)有$(D,\ T)=1$, 按定理 6 对(118)做 U 变换。令$U\neq 0$, 为整数，

$$N-T^{p-1}=UD, \tag{119}$$

$$E-D^{p-1}=UT, \tag{120}$$

于是有 $N=T^{p-1}+UD$, $E=D^{p-1}+UT$, 再由(111),(106)易见有

$$z-r=D^{p}+UTD, \tag{121}$$

$$z-s=T^{p}+UTD, \tag{122}$$

再由(99),(100)有

$$z=T^{p}+D^{p}+UTD. \tag{123}$$

由(99),(100),(123)易见(20)可写为

$$h=UTD, \tag{124}$$

因$h>0$, $TD>0$, 显然须有$U>0$.

4. 由(107)有$\left(N, T^{p-1}\right)=1$, 再由定理 1 有$\left(N-T^{p-1}, NT\right)=1$, 再由(119)有

$$\left(UD, NT\right)=1. \tag{125}$$

由(112)有$\left(E, D^{p-1}\right)=1$, 再由定理 1 有$\left(E-D^{p-1}, DE\right)=1$, 再由(120)有

$$\left(UT, DE\right)=1. \tag{126}$$

由(125),(126)有

$$\left(U, DETN\right)=1 \tag{127}$$

及T,D,U 两两互素。

5. 观察(124), 我们依据结论 3, 从讨论U之因子入手，确定h之因式结构。

1). 由(127),(111),(106),(15),(16)有$\left(U, xy\right)=1$;

2). 由(49),(15),(16)有$\left(h, p(x+y)\right)=q\,p^{\theta}$, 且 $q\,p^{\theta}\in U$. 这是因为由 (111),(106),(15)及(16)有$TD\in xy$, 而 $q\,p^{\theta}\in p(x+y)$, 由(98)知 $\left(q\,p^{\theta}, TD\right)=1$.

3). 若 h不在$\Psi(p,x,y)$内得到因子，只能是$U=q\,p^{\theta}$, $h=q\,p^{\theta}TD$, 由此及(99),(100)有$\dfrac{h^p}{prs}=q^p\,p^{p\theta-1}$, 即 $\dfrac{h^p}{prs}=r+s+2h$（由(21),(22)知(48)亦即$(s+h)+(r+h)=q^p\,p^{p\theta-1}$, 亦即$r+s+2h=q^p\,p^{p\theta-1}$），于是由结论 9 知若$p>3$, (59)一定不能成立。于是令 h从$\Psi(p,x,y)$得到因子ω, 且$p>3$时有$\omega>1$. 因已有 $TD\in xy$, 而$\omega\in\Psi(p,x,y)$, 由(3)有 $\left(TD, \omega\right)=1$, 于是显见 $\omega\in U$. 至此有

$$U=q\,p^{\theta}\omega, \tag{128}$$

且(124)随之化为(101).

4). 观察(128), 因为 $q\,p^{\theta}\in p(x+y)$, 而 $\omega\in\Psi(p,x,y)$, 由(98)知 $\left(q\,p^{\theta}, \omega\right)=1$, 再由(44)及已得 T,D,U 两两互素，显然有 T,D,p,q,ω 两两互素。本结论证毕。

结论 13 本模型，(43)与其以后的结果相悖。

证 由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$, (42),(48),(20),(102)有 $A=q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega$, 由(46),(101)有$A-B=TD\omega$, 于是显然有

$$B=q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega. \tag{129}$$

观察(43), 由(99),(100)知其可写为 $T^p+D^p=q\,p^{\theta}B$, 再将(129)代入, 得

$$T^p+D^p=q\,p^{\theta}\left(q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega\right), \tag{130}$$

分解后化为

$$(T+D)\left\langle(T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=q\,p^{\theta}\left(q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega\right). \tag{131}$$

1. 若 r,s一奇一偶，则 q为奇，由结论 12 知此时有 q,p,T,D,ω 两两互素，于是显然有$\left(q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}, 2TD\omega\right)=1$, 再由定理 1 有 $\left(q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega, q\,p^{\theta}\right)=1$. 而由定理 8 知，

若 $(T+D,\ p)=1$，有 $\left((T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D),\ p\right)=1$. 显见此时(131)右以 p 为因子，而左与 p 互素，一定不能成立；若 $(T+D,\ p)=p$，(131)化为

$$p(T+D)\left\langle\frac{(T+D)^{p-1}}{p}-TD\Psi(p,T,D)\right\rangle=q\,p^{\theta}\left(q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega\right). \qquad (131\text{-}1)$$

且有 $\left(p(T+D),\ \frac{(T+D)^{p-1}}{p}-TD\Psi(p,T,D)\right)=1$. 易见只有令 $T+D=q\,p^{\theta-1}$，(131-1)左才能化为其一亦为 $q\,p^{\theta}$ 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$q\,p^{\theta}\left\langle q^{p-1}p^{(p-1)(\theta-1)-1}-TD\Psi(p,T,D)\right\rangle=q\,p^{\theta}\left\langle q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega\right\rangle.$$

然而，这样做，$T+D$ 的值被缩小了。若令 $T+D=q\,p^{\zeta}$，可证有 $\zeta>\theta-1$.

由(48)易见有 $q\,p^{\theta}=\left\{p\left\langle(z-r)+(z-s)\right\rangle\right\}^{1/p}$，再由(15),(16)有 $q\,p^{\theta}=\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}$，由此有 $q=\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{p^{\theta}}$，代入 $T+D=q\,p^{\zeta}$ 有 $T+D=\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{p^{\theta}}p^{\zeta}$，$p^{\zeta}=\frac{T+D}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}p^{\theta}$，

$$\zeta\ln p=\ln\frac{T+D}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}+\theta\ln p,\quad \zeta=\frac{1}{\ln p}\ln\frac{T+D}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}+\theta,\quad \zeta=\theta-\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{T+D}.$$

易见，证出 $\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{T+D}<1$ 即可。而由(99),(100) 知此即 $\frac{1}{\ln p}\ln\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{r^{1/p}+s^{1/p}}<1$，令 $y/x=k$，将定理 9 之(3),(4),(5)代入该式，该式化为定理 9 之(10)，已证。

2. 若 r,s 皆为奇，则 q 为偶，令 $q=2^{\alpha}q_1$，q_1 为奇，α 为正整数，(131)化为

$$(T+D)\left\langle(T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega\right). \qquad (132)$$

由结论 12 知，此时 $2,q_1,p,T,D,\omega$ 两两互素，显然有 $\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1},\ TD\omega\right)=1$，再由定理 1 有 $\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega,\ 2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}\right)=1$. 由定理 8 易见，若 $(T+D,\ p)=1$，有 $\left((T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D),\ p\right)=1$. 此时(132)右以 p 为因子，而左与 p 互素，一定不能成立；若 $(T+D,\ p)=p$，(132)化为

$$p(T+D)\left\langle\frac{(T+D)^{p-1}}{p}-TD\Psi(p,T,D)\right\rangle=2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1\,p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega\right). \qquad (132\text{-}1)$$

且有 $\left(p(T+D),\ \frac{(T+D)^{p-1}}{p}-TD\Psi(p,T,D)\right)=1$. 显见只有令 $T+D=2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta-1}$，(132-1)左才能化为其一亦为 $2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}$ 的两互素因子之积且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}\left\langle 2^{(p-1)(\alpha+1)}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\Psi(p,T,D)\right\rangle=2^{\alpha+1}q_1\,p^{\theta}\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega\right).$$

然而，这样做，$T+D$ 的值被人为地缩小了。若令 $T+D=2^{\alpha+1}q_1\,p^{\zeta}$，可证有 $\zeta>\theta-1$.

由(48)有 $q\,p^{\theta}=\left\{p\left\langle(z-r)+(z-s)\right\rangle\right\}^{1/p}$，再由(15),(16)有 $q\,p^{\theta}=\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}$，已令 $q=2^{\alpha}q_1$，

于是有 $2^{\alpha} q_1 p^{\theta}=\langle p(x+y)\rangle^{1/p}$，亦即有 $2^{\alpha} q_1=\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{p^{\theta}}$，将其代入 $T+D=2^{\alpha+1} q_1 p^{\zeta}$ 内显然有 $T+D=2\frac{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{p^{\theta}} p^{\zeta}$，$p^{\zeta}=\frac{T+D}{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}} p^{\theta}$，$\zeta \ln p=\ln\frac{T+D}{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}+\theta \ln p$，$\zeta=\frac{1}{\ln p}\ln\frac{T+D}{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}+\theta$，$\zeta=\theta-\frac{1}{\ln p}\ln\frac{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{T+D}$. 证出 $\frac{1}{\ln p}\ln\frac{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{T+D}<1$ 即可，由(99),(100)知此即 $\frac{1}{\ln p}\ln\frac{2\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}{r^{1/p}+s^{1/p}}<1$，令 $y/x=k$，将定理 9 之(3),(4),(5)代入该式，该式化为定理 9 之(8)，已证。本结论证毕。本模型证毕。

第三模型

由(3)知本模型有

$$\left(p\Psi(p,x,y),\ (x+y)xy\right)=1, \tag{133}$$

显然在**情况 I** 内。

结论 14 令 T,D,θ,ω 为正整数，$p^{\theta}\omega$ 为 $p\Psi(p,x,y)$ 之因子，则只有当

$$r=T^{p}, \tag{134}$$

$$s=D^{p}, \tag{135}$$

$$h=q\,p^{\theta}TD\omega, \tag{136}$$

T,D,p,q,ω 两两互素，(17)才有可能成立。

证 观察(56),(57)，本模型 $(xy,\ p)=1$，亦即 $((z-r)(z-s),\ p)=1$，易见，只有

$$\left(\langle z-(z-r)\rangle\left\{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\},\ p\right)=1, \tag{137}$$

(56)才有可能成立；只有

$$\left(\langle z-(z-s)\rangle\left\{\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z,-(z-s))\right\},\ p\right)=1, \tag{138}$$

(57)才有可能成立，否则此二式均左含因子 p，而右不含因子 p.

1. 观察(56)，注意到(137)包含 $(z-(z-r),\ p)=1$，由定理 8 有

$$\left(z-(z-r),\ \langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right)=1,$$

且注意到 $(z-s,\ p)=1$，由定理 5，显然，只有令 T,N 为正整数，

$$z-(z-r)=T^{p}, \tag{139}$$

$$\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))=N^{p}, \tag{140}$$

$$z-s=TN, \tag{141}$$

$$(T,\ N)=1, \tag{142}$$

$$(TN,\ p)=1, \tag{143}$$

(56)才有可能成立。(139)亦即(134).

2. 观察(57)，注意到(138)包含 $(z-(z-s),\ p)=1$. 于是由定理 8 有

$$\left(z-(z-s),\ \langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi\left(p,z-(z-s)\right)\right)=1,$$

且注意到$\left(z-r,\ z-s\right)=1$及本模型$\left(z-r,\ p\right)=1$，由定理 5，显然只有令D,E为正整数，

$$z-(z-s)=D^{p}, \tag{144}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi\left(p,z-(z-s)\right)=E^{p}, \tag{145}$$

$$z-r=DE, \tag{146}$$

$$\left(D,\ E\right)=1, \tag{147}$$

$$\left(DE,\ p\right)=1, \tag{148}$$

$$\left(DE,\ TN\right)=1, \tag{149}$$

(57)才有可能成立。(144)亦即(135).

3. 已证(134),(135)成立，由此二式及(146),(141)有

$$z-T^{p}=DE, \tag{150}$$

$$z-D^{p}=TN, \tag{151}$$

且由此有$DE+T^{p}=D^{p}+TN$，$DE-D^{p}=TN-T^{p}$ 及

$$D\left(E-D^{p-1}\right)=T\left(N-T^{p-1}\right). \tag{152}$$

由(147)有$\left(E,\ D^{p-1}\right)=1$，由结论 1 有$x\neq 1$，再由(15),(146)有$E\,D^{p-1}\neq 1$，于是由定理 7 有$E-D^{p-1}\neq 0$，又因$T\neq 0$，所以(152)可写为

$$\frac{D}{T}=\frac{N-T^{p-1}}{E-D^{p-1}}. \tag{153}$$

因由(149)有$\left(D,\ T\right)=1$，对(153)做 U 变换，令$U\neq 0$为整数，

$$N-T^{p-1}=UD, \tag{154}$$

$$E-D^{p-1}=UT, \tag{155}$$

于是有$N=T^{p-1}+UD$，$E=D^{p-1}+UT$，再由(146),(141)易见有

$$z-r=D^{p}+UTD, \tag{156}$$

$$z-s=T^{p}+UTD, \tag{157}$$

再由(134),(135)有

$$z=T^{p}+D^{p}+UTD. \tag{158}$$

由(134),(135),(158)易见(20)可写为

$$h=UTD, \tag{159}$$

因$h>0$，$TD>0$，显然须有$U>0$.

4. 由(142)有$\left(N,\ T^{p-1}\right)=1$，由定理 1 有 $\left(N-T^{p-1},\ NT\right)=1$，再由(154)有

$$\left(UD,\ NT\right)=1. \tag{160}$$

由(147)有$\left(E,\ D^{p-1}\right)=1$，由定理 1 有$\left(E-D^{p-1},\ DE\right)=1$，再由(155)有

$$\left(UT,\ DE\right)=1. \tag{161}$$

由(160),(161)有

$$\left(U,\ DENT\right)=1, \tag{162}$$

及D,T,U两两互素。

5. 观察(159)，我们依据结论 3，从讨论U之因子入手，确定h之因式结构。

1). 由(162),(146),(141),(15),(16)有$(U,\ xy)=1$

2). 由(37),(15),(16)有 $(h,\ x+y)=q$，且 $q\in U$，因为由(146),(141),(15),(16)有$TD\in xy$，而 $q\in x+y$，由(3)有$(q,\ TD)=1.$

3). 若h不从$p\Psi(p,x,y)$得到因子，则只能是$U=q,\quad h=qTD$，由此及(134),(135)易得$\dfrac{h^p}{prs}=\dfrac{q^p}{p}$，即$\dfrac{h^p}{prs}=\dfrac{r+s+2h}{p}$（由(21),(22)知(36)即$(s+h)+(r+h)=q^p,\quad r+s+2h=q^p$），而由结论 9 知，若$p>3$，此时(59)不能成立。事实上，结论 2 和结论 4 对此已有表述，亦即h必以 p为因子，且h之因子p之最高指数应与$xy\Psi(p,x,y)$之因子p之最高指数相同。而因为本模型有$(\Psi(p,x,y),\ p)=p,\quad (xy,\ p)=1$，所以只能令$\theta$为$\Psi(p,x,y)$之因子$p$之最高指数，即 $p^\theta\in\Psi(p,x,y)$ 且 $\left(\dfrac{\Psi(p,x,y)}{p^\theta},\ p\right)=1,\quad \theta\geq 1$为正整数，$h$从$\Psi(p,x,y)$内得到因子$p^\theta$. 因 $q\in x+y$，且 2）已有$TD\in xy$，于是由(133)有$(qTD,\ p)=1$，显然 h之因子p^θ一定在U内，即 $p^\theta\in U$. 结论 9 之意为 h不能只含 qTD，而没说 h到底要多少因子，所以不妨令h再从$\Psi(p,x,y)$得到另一因子$\omega,\quad \omega\geq 1,\quad (\omega,\ p)=1$. 因 $\omega\in\Psi(p,x,y)$，且 2) 已有$TD\in xy$，于是由(133)有$(TD,\ \omega)=1$，显然 ω只能在 U内，即 $\omega\in U$. 于是有

$$U=q\,p^\theta\,\omega, \tag{163}$$

且(159)随之化为(136).

前两模型，$p>3$时，要有 $\omega>1$. 因为那时若 $\omega=1$，则失去了引入ω的意义。而本模型却不同，因为 h得到了p^θ，也就是h在 qTD之外得到了其它因子，结论 9 已经被满足。显然，即使不引出 ω，也不影响证明之思路和准确性。而引出 ω，使证明更具一般性。

4). 已得T,D,U两两互素，因 $p^\theta\in\Psi(p,x,y),\quad q\in x+y$，由(133)显然有$(q,\ p^\theta\omega)=1$且因已令$(\omega,\ p)=1$，于是显然有 $T,D,p,q,\ \omega$ 两两互素。本结论证毕。

结论 15 本模型，(32)与其以后的结果相悖。

证 由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$,(31),(36),(20),(136)有 $A=q^{p-1}-p^\theta TD\omega$，由(34),(136)有$A-B=p^\theta TD\omega$，于是显然有

$$B=q^{p-1}-2\,p^\theta\,TD\omega. \tag{164}$$

观察(32)，由(134),(135)知其可写为 $T^p+D^p=qB$，再由(164)有

$$T^p+D^p=q\left(q^{p-1}-2\,p^\theta\,TD\omega\right), \tag{165}$$

分解因式后化为

$$(T+D)\left\langle(T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=q\left(q^{p-1}-2\,p^\theta\,TD\omega\right). \tag{166}$$

1. 若 r,s一奇一偶，则q为奇，由结论 14 有 q,p,T,D,ω 两两互素，于是显然有$\left(q^{p-1},\ 2\,p^\theta\,TD\omega\right)=1$，由定理 1 有$\left(q^{p-1}-2\,p^\theta\,TD\omega,\ qp\right)=1$. 由定理 8 知若 $(T+D,\ p)=p$，则(166)一定不能成立，因为这时其右与 p互素，而左以 p为因子；若$(T+D,\ p)=1$，有

$\left(T+D,\ (T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right)=1$. 易见只有令 $T+D=q$, (166)左才能化为其一亦为 q 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$q\left\langle q^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=q\left(q^{p-1}-2\,p^{\theta}TD\omega\right), \tag{167}$$

且可化为

$$pTD\left\langle\Psi(p,T,D)-2\,p^{\theta-1}\omega\right\rangle=0. \tag{168}$$

因 $pTD\neq0$, 且 $\Psi(p,T,D)$ 为奇（见关于奇偶性的一点注记），显然(168)不能成立。

2. 若 r,s 皆为奇，则 q 为偶，令 $q=2^{\alpha}q_1$， q_1 为奇，(166)化为

$$(T+D)\left\langle(T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=2^{\alpha+1}q_1\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\right). \tag{169}$$

由结论 14 有 $2,q_1,p,T,D,\omega$ 两两互素，于是显然有$\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1},\ p^{\theta}TD\omega\right)=1$, 由定理 1 有 $\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}-p^{\theta}TD\omega,\ 2^{\alpha+1}q_1\right)=1$. 这里我们注意到,由定理 8 易见，若 $(T+D,\ p)=p$, 则(169)一定不能成立，因为这时其右与 p 互素，左却以 p 为因子；若 $(T+D,\ p)=1$, 有 $\left(T+D,\ (T+D)^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right)=1$. 易见，只有令 $T+D=2^{\alpha+1}q_1$，(172)左才能化为其一亦为 $2^{\alpha+1}q_1$ 的两互素因子之积，且两端之另一因子至少在结构形式上相似，即

$$2^{\alpha+1}q_1\left\langle 2^{(p-1)(\alpha+1)}q^{p-1}-pTD\Psi(p,T,D)\right\rangle=2^{\alpha+1}q_1\left(2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\right), \tag{170}$$

即

$$2^{(p-1)\alpha-1}q_1^{p-1}\left(2^{p}-1\right)-pTD\left\langle\Psi(p,T,D)-p^{\theta-1}\omega\right\rangle=0. \tag{171}$$

我们先来证明 $\left(2^{p}-1,\ p\right)=1$. 由二项式定理展开 $(2-1)^{p}$，易得恒等式

$$(2-1)^{p}=\left(2^{p}-1\right)-p\left\langle 2^{p-1}-\frac{\binom{p}{2}}{p}2^{p-2}+\frac{\binom{p}{3}}{p}2^{p-3}-\cdots-2\right\rangle. \tag{172}$$

(172)左与 p 互素，若 $\left(2^{p}-1,\ p\right)=p$, 除以 p, 左化为分数。显然，只有 $\left(2^{p}-1,\ p\right)=1$, (172)才有可能成立，而(172)是恒等式，所以必有 $\left(2^{p}-1,\ p\right)=1$.

观察(171). 若左第二项为 0, (171)不能成立，因为左第一项不为 0; 由 $\left(2^{p}-1,\ p\right)=1$, $(q_1,\ p)=1$ 知左第一项与 p 互素，而易见第二项明显以 p 为因子，显然(171)一定不成立（因为若除以 p, 左第一项化为分数）。本结论证毕。本模型证毕。本定理证毕。

5. 结语

1. 引言：“ n 为奇素数时， 将二项式定理写为 …，且变形成为 … ，式中 … 为一个代数式， 因 n 而异，而 n 为奇和数时写不成。” 这写不成之原因见 2. 互素理论 第(8)式至第(11)式之前的叙述。 n 为奇和数时，令 $n=kp$, k 为正整数， p 为奇素数，方程写为 $\left(x^{k}\right)^{p}+\left(y^{k}\right)^{p}=\left(z^{k}\right)^{p}$. 同理， $n=4$ 证出， $n=4k$ 随之解决，方程写为 $\left(x^{k}\right)^{4}+\left(y^{k}\right)^{4}=\left(z^{k}\right)^{4}$. 潘承洞、潘承彪著《初等数论》（北京大学出版社，1992.）中有 $n=4$ 和 $p=3$ 的证明，但没说是否与首证者原作相同。

17 世纪以来，许多第一流的数学家都试图重新作出费马宣称已得到的证明，或者发现另一个证明，但都没有成功。 …FLT 简史可见《数学专业英语文选》下册，南京大学外文

系公共英语教研室编，商务印书馆，1979，北京。

2. 整数变量有内部结构 (inner designs) 是互素理论与函数理论，在出发点上，带有本质性的区别。互素理论着眼于互素因子之生灭，是因子的脱胎换骨，涅槃，函数理论只是变量之间的依赖，对应。

我们令 $z=(x+y)-h,\quad x=z-r,\quad y=z-s$ 等，都是在剖切变量，看结构。看 x, y, z 必须具有怎样的结构，结构之间必须满足怎样的关系，费马方程才可能有整数解。我们历尽艰辛，查出了这结构，弄清了这关系，

第一模型：

$$x=D^p+q\,p^\theta TD\omega=s+h=s+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega$$
$$=(z-y)+(x+y)^{1/p}\{p(z-x)\}^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$y=p^{p\theta-1}T^p+q\,p^\theta TD\omega=r+h=r+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,$$
$$=(z-x)+(x+y)^{1/p}\{p(z-x)\}^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$z=p^{p\theta-1}T^p+D^p+q\,p^\theta TD\omega=r+s+h=r+s+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,$$
$$=qA=(x+y)-h=(x+y)-(x+y)^{1/p}\{p(z-x)\}^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素},\quad r=p^{p\theta-1}T^p,\quad s=D^p,\ \omega\in\Psi(p,x,y),\quad h=q\,p^\theta TD\omega,$$
$$q=(x+y)^{1/p}=(r+s+2h)^{1/p}=\left(p^{p\theta-1}T^p+D^p+2q\,p^\theta TD\omega\right)^{1/p},$$
$$p^{p\theta-1}T^p+D^p=qB,\quad A=q^{p-1}-p^\theta TD\omega.$$

第二模型：

$$x=D^p+q\,p^\theta TD\omega=s+h=s+\{p((s+h)+(r+h))\}^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,$$
$$=(z-y)+\{p(x+y)\}^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$y=T^p+q\,p^\theta TD\omega=r+h=r+\{p((s+h)+(r+h))\}^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\omega,$$
$$=(z-x)+\{p(x+y)\}^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$z=T^p+D^p+q\,p^\theta TD\omega=r+s+h=r+s+\{p((s+h)+(r+h))\}^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\omega$$
$$q\,p^\theta A=(x+y)-h=(x+y)-\{p(x+y)\}^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,$$
$$\omega\in\Psi(p,x,y),\quad T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素},\quad r=T^p,\quad s=D^p,\quad h=q\,p^\theta TD\omega,$$
$$q\,p^\theta=\{p(x+y)\}^{1/p}=\{p(r+s+2h)\}^{1/p}=\left\{p\left(T^p+D^p+2q\,p^\theta TD\omega\right)\right\}^{1/p},$$
$$T^p+D^p=q\,p^\theta B,\quad A=q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega.$$

第三模型：

$$x=D^p+qTD\,p^\theta\omega=s+h=s+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}p^\theta\omega$$
$$=(z-y)+(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}p^\theta\omega,$$
$$y=T^p+qTD\,p^\theta\omega=r+h=r+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}p^\theta\omega$$
$$=(z-x)+(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}p^\theta\omega,$$
$$z=T^p+D^p+qTD\,p^\theta\omega=r+s+h=r+s+\{(s+h)+(r+h)\}^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}p^\theta\omega$$
$$qA=(x+y)-h=(x+y)-(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}p^\theta\omega.$$
$$p^\theta\omega\in\Psi(p,x,y),\quad T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素},\quad r=T^p,\quad s=D^p,\quad h=qTD\,p^\theta\omega,$$

$$q=(x+y)^{1/p}=\{r+s+2h\}^{1/p}=\left(T^p+D^p+2q\,p^{\theta}TD\omega\right)^{1/p},$$
$$T^p+D^p=qB,\quad A=q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega.$$

而同时，或者说稍晚些时候，却发现这结构，这关系中存在矛盾。于是得出结论：费马方程无整数解，FLT 成立。

3. 让人相信这篇文章是困难的，领路人没用过此种方法。看懂这篇文章也是困难的，不相信它，也就很难看下去。一切用新思想写成的文章都难免此遇，而首先读懂它的人将功在历史，如 1857 年，Riemann 的四篇关于 Abel 积分和 Abel 函数的论文。