（2004 年 11 月 1 日本文以《互素理论与费马最后定理（A）》之题目首发于互联网，2008 年 5 月 26 日做过修改。根据读者建议，2017 年 1 月 25 日再次修改，并启用本标题。）www.qptj.com

用初等方法证明费马最后定理(A篇)

-互素理论与费马最后定理(A篇)

王瑞林

镇赉县交通局　吉林镇赉(137300)

chinawrl@126.com

摘要: 本文以互素理论为工具，以二项式定理为平台，证明了：$p>3$ 为奇素数，方程 $x^p+y^p=z^p$ 无两两互素的正整数解 x,y,z，亦即使用在有理整数系统内操作的方法证明了费马最后定理成立。

关键词：费马最后定理，费马方程，互素理论，二项式定理

中图分类号：0156.4　文献标识码：

Proving Fermat's Last Theorem by a elementary method (A)

-Coprime Theory and Fermat's Last Theorem(A)

WANG Rui-lin

Communications Bureau of the county of Zhenlai　Jilin Zhenlai of China (137300)

Email:wangruilin080420@126.com

Abstract: In this paper, taking coprime theory as tools, taking Binomial Theorem as a platform, we have proved : For any odd prime $p>3$, the equation $x^p+y^p=z^p$ has no solutions with x,y,z which are positive integers and coprime in pairs, i.e. in a way operating in the system of rational integers have proved Fermat's Last Theorem true.

Key Words: Fermat's Last Theorem, Fermat's equation, Coprime theory, Binomial Theorem,

1. 引言

费马最后定理即：对任何自然数 $n>2$，方程 $x^n+y^n=z^n$ 无非零整数解 x,y,z，且问题早已归结到只需解决 $n=p>3$ 为奇素数，x,y,z 为两两互素之正整数之情形。要指出的是，A. Wiles 未能终结该定理之研究（关于他的文章 Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann of Math 141 1995*, 我同意 Daniel J. Velleman 的评论 Fermat's Last Theorem and Hibert's Program, *The Mathematical Intelligencer, Vo.19 No. 19, No1. 1. 1997,*) 迄今，世界上许多数学家，仍在为找到一个可以被不同学派接受的，不涉嫌数学基础之争论之方法，给这个著名定理以真正义意上的证明，而努力工作，且无疑，最好是能找到一个初等方法。

n 为奇素数时，将二项式定理写成 $(x+y)^n=(x^n+y^n)+nxy(x+y)\Psi(n,x,y)$，且变形成为 $x^n+y^n=(x+y)\langle(x+y)^{n-1}-nxy\Psi(n,x,y)\rangle$, 式中 $\Psi(n,x,y)$ 为一个代数式，因 n 而异（注意：n 为奇和数时写不成，见结语）。之后证出 $x+y,\ xy,\ \Psi(p,x,y)$ 三者两两互素，找到区分结

构类型的理论根据，将命题先分为两种情况$(x+y,\ p)=1,\ (x+y,\ p)=p,$ 再化成三个模型$(xy,\ p)=p,\ (x+y,\ p)=p,\ (\Psi(p,x,y),\ p)=p$ 分别讨论。

互素理论是本文的主要工具，出发点是变量在系统中的对立统一关系，即变量之间的互素关系和系统的可除性，哲学背景是唯物辩证法。

本文的许多步都是在求索某等式成立之必要条件， 最后因发现该等式某两个必要条件之间存在矛盾而结局。所以，本文不谈，也无需谈充分条件。推理主要用一种形式的语句，即“只有 A 为真，B 才有可能为真。” 论述中暗用了两个可以免证的定理，即“若干个整数与一个分数之和一定不为整数”及“两个或多个分数之和有可能为整数。”本文“整数”只指有理整数，“分数”只指不能化成整数之分数， 未加说明的字母表整数。文中所谈“因子”，一般不涉及1 和 –1. 为简捷，用 $a\in M$ 表 a 是 M 之因子， a,M 为代数式。此外，再没使用集合论之任何理论和符号。

本文独立成文，与任何他人文章无关，与“同余”、“某种形式素数的存在性”、“无穷递降法”、“分圆域”、“椭圆曲线”等无关。

为方便审阅，本文之所有公式均以最基本、最直观的形式写出。

作者关于 FLT 写了两篇文章，本文是第一篇，自始至终着眼于“系统的可除性”，另一篇用到了“系统中的变量在数值上的比例关系”。

2. 互素理论

定理 1,2,3,4,5 为加法定理，6 为乘法定理，7 为二元 p 次型。

定理 1 若u,v为整数，$(u,\ v)=1,$ 则有 $(u+v,\ uv)=1.$ **证** 我们考虑等式 $u+v=w.$ 因$(u,\ v)=1,$ 若$(w,\ u)=t\neq 1,$ 除以 $t,$ 左第二项化为分数，此式一定不能成立；同理，如果$(w,\ v)=t\neq 1,$ 除以$t,$ 左第一项化为分数， 此式亦一定不能成立； 显然， 只有$(w,\ uv)=1,$ 该式才有可能成立。证毕。

定理 2 若 u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1,$ 则有 $(u+kv,\ v)=1.$ **证** 1. 若 $(u,\ k)=1,$ 由$(u,\ v)=1$ 有 $(u,\ kv)=1,$ 由定理 1 有 $(u+kv,\ ukv)=1.$ 2. 若 $(u,\ k)=t\neq 1,$ 令 $u=at,$ $k=bt,$ $(a,\ b)=1,$ 于是 $(u+kv,\ v)=1$ 化为 $(t(a+bv),\ v)=1.$ 后，由 $(u,\ v)=1,$ $u=at$ 有 $(t,\ v)=1,$ 于是证出 $(a+bv,\ v)=1$ 成立即可。由 $(u,\ v)=1,$ $u=at,$ $(a,\ b)=1$ 有 $(a,\ bv)=1,$ 由定理 1 有 $(a+bv,\ abv)=1.$ 证毕。

定理 3 u,v,k_i 为整数，$(u,\ v)=1,$ $k_0=|k_n|=1,$ 有$\left(\sum_{i=0}^{n}k_iu^{n-i}v^i,\ uv\right)=1.$

证 $|k_n|=1$时，为便于表述，将k_n写成 $(-1)^c,$ c 为正整数。于是当$k_0=|k_n|=1$时有

$$\sum_{i=0}^{n}k_iu^{n-i}v^i=u^n+k_1u^{n-1}v+k_2u^{n-2}v^2+k_3u^{n-3}v^3+\cdots+k_{n-3}u^3v^{n-3}$$
$$+k_{n-2}u^2v^{n-2}+k_{n-1}uv^{n-1}+(-1)^cv^n. \qquad (1)$$

为便于推理，逐一分离变量，将(1)化为

$$\sum_{i=0}^{n}k_iu^{n-i}v^i=u\left\{u\left\langle u\cdots u\left[u\left(u+k_1v\right)+k_2v^2\right]+k_3v^3\cdots+k_{n-2}v^{n-2}\right\rangle+k_{n-1}v^{n-1}\right\}+(-1)^cv^n. \quad (2)$$

观察(2), 不难看出，若令 $\Omega_1=u+k_1v,$ 则有 $\Omega_2=u\Omega_1+k_2v^2,$ $\Omega_3=u\Omega_2+k_3v^3,$

…， $\Omega_{n-1}=u\Omega_{n-2}+k_{n-1}v^{n-1}$， $\Omega_n=u\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n$， 即 $\sum_{i=0}^{n} k_i u^{n-i}v^i=\Omega_n$. 于是，显然，证出 $(\Omega_n,\ uv)=1$成立则可。由$(u,\ v)=1$及定理 2 有 $(u+k_1v,\ v)=1,$ 即 $(\Omega_1,\ v)=1;$ 继而由 $(u,\ v)=1$有$(u\Omega_1,\ v)=1,$ $(u\Omega_1,\ v^2)=1,$ 由定理 2 有$(u\Omega_1+k_2v^2,\ v^2)=1,$ 即$(\Omega_2,\ v^2)=1;$ 继而由$(u,\ v)=1$有 $(u\Omega_2,\ v^2)=1,$ $(u\Omega_2,\ v^3)=1,$ $(u\Omega_2+k_3v^3,\ v^3)=1,$ $(\Omega_3,\ v^3)=1;$ …， $(\Omega_{n-1},\ v^{n-1})=1,$ $(u\Omega_{n-1},\ v^n)=1,$ $(u\Omega_{n-1},\ (-1)^c v^n)=1,$ 至此由定理 1 有 $(u\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n,$ $u\Omega_{n-1}(-1)^c v^n)=1,$ 即 $(\Omega_n,\ u\Omega_{n-1}(-1)^c v^n)=1.$ 由此显见有 $(\Omega_n,\ uv)=1$ 本定理证毕。

定理 4 a,b,v 为整数，$(a,\ v)=|v|,$ $(b,\ v)=1,$ 有 $(a+b,\ v)=1,$ $(a+(a+b),\ v)=1.$

证 令 k,u 为整数，$a=kv,$ $(k,\ v)=1,$ $b=u,$ 命题 1 化为：u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1,$ 有$(u+kv,\ v)=1.$ 显然此乃定理 2 之命题，已证。令 $c=a+b,$ 命题 2 化为：a,c,v 为整数，$(a,\ v)=|v|,$ $(c,\ v)=1,$ 有$(a+c,\ v)=1.$ 与命题 1 相同。证毕。

定理 5 a,b 为正整数，$ab\neq 1,$ $(a,\ b)=1,$ 有 $a-b\neq 0.$ （证略）

定理 6 1. a,b,c,d 为正整数，$(a,\ b)=(a,\ c)=(b,\ d)=1,$ 则只有当$a=d,$ $b=c$ 时，$ab=cd$ 才有可能成立；2. a,b,c,d 为正整数，$abcd\neq 0,$ $(a,\ c)=1,$ 只有当$d=Ua,$ $b=Uc,$ $U\neq 0$ 为整数时，$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$才有可能成立。(证略）我们将d,b向Ua,Uc的转化叫做 U 变换。

定理 7 u,v 为整数，$uv\neq 0,$ $(u,\ v)=1,$ $p>3$为奇素数，且令

$$\Psi(p,u,v)=\frac{(u+v)^p-(u^p+v^p)}{(u+y)puv}, \tag{1}$$

则有 $u+v,\ uv,\ \Psi(p,u,v)$ 三者两两互素，即

$$(u+v,\ uv)=(u+v,\ \Psi(p,u,v))=(uv,\ \Psi(p,u,v))=1; \tag{2}$$

且$(u+v,\ p)=1$时，有

$$((u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v),\ p)=1, \tag{3}$$

$$(u+v,\ (u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v))=1; \tag{4}$$

$(u+v,\ p)=p$ 时，有

$$\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v),\ p\right)=1, \tag{5}$$

$$\left(p(u+v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v)\right)=1; \tag{6}$$

证 (1)可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\langle\langle u+v\rangle^{p-1}-puv\Psi(p,u,v)\right\rangle. \tag{7}$$

由二项式定理有

$$(u+v)^p=u^p+\binom{p}{1}u^{p-1}v+\binom{p}{2}u^{p-2}v^2+\cdots+\binom{p}{p-2}u^2v^{p-2}+\binom{p}{p-1}uv^{p-1}+v^p, \tag{8}$$

且可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\{(u+v)^{p-1}-puv\left\langle\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{\binom{p}{2}(u^{p-4}+v^{p-4})}{p(u+v)}uv+\cdots+\frac{\binom{p}{(p-1)/2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}\right\rangle\right\}. \tag{9}$$

比较(7)和(9), 有

$$\Psi(p,u,v)=\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{\binom{p}{2}(u^{p-4}+v^{p-4})uv}{p(u+v)}+\cdots+\frac{\binom{p}{(p-1)/2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{10}$$

因 p 为奇素数，所以 $p-2,\ p-4,\ p-6,\ \ldots$ 皆为奇数，于是 $u^{p-2}+v^{p-2},\ u^{p-4}+v^{p-4},\ u^{p-6}+v^{p-6},\ \ldots$ 一定能被 $u+v$ 整除，且亦因 p 为奇素数，$\binom{p}{k}\Big/p$ 一定为整数（这是因为 $\binom{p}{k}=\frac{p!}{(p-k)!k!},\ p$ 为素数，且 $k<p$，分母诸因子均小于 p，所以分子中的 p 一定不会与分母之任何素因子相约，而若 p 为奇合数，则不然），所以(10)之各项皆为整数。

(1)还可化为

$$\Psi(p,u,v)=\frac{1}{puv}\Big\{(u+v)^{p-1}-\Big\langle\big(u^{p-1}+v^{p-1}\big)-\big(u^{p-3}+v^{p-3}\big)uv+\big(u^{p-5}+v^{p-5}\big)(uv)^2-$$
$$\cdots+(-1)^{(p-3)/2}\big(u^2+v^2\big)(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\Big\rangle\Big\}, \tag{11}$$

注意到，当 j 为偶数时，有

$$u^j+v^j=(u+v)^j+L_1(u+v)^{j-2}uv+L_2(u+v)^{j-4}(uv)^2+L_3(u+v)^{j-6}(uv)^3+\ldots$$
$$+L_{(j-4)/2}(u+v)^4(uv)^{(j-4)/2}+L_{(j-2)/2}(u+v)^2(uv)^{(j-2)/2}+L_{j/2}(uv)^{j/2}. \tag{12}$$

至此，易见(10)和(11)最终皆可转化为

$$\Psi(p,u,v)=k_0(u+v)^{p-3}+k_1(u+v)^{p-5}uv+k_2(u+v)^{p-7}(uv)^2+\cdots$$
$$+k_{(p-5)/2}(u+v)^2(uv)^{(p-5)/2}+k_{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{13}$$

因 $p-2$ 为奇数，由 $a^p+b^p=(a+b)\big(a^{p-1}-a^{p-2}b+\cdots-ab^{p-2}+b^{p-1}\big)$ 易得

$$u^{p-2}+v^{p-2}=(u+v)\Big\langle\big(u^{p-3}+v^{p-3}\big)-\big(u^{p-5}+v^{p-5}\big)uv+\big(u^{p-7}+v^{p-7}\big)(uv)^2-\ldots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}\Big\rangle,$$

显见(10)右第一项可化为

$$\big(u^{p-3}+v^{p-3}\big)-\big(u^{p-5}+v^{p-5}\big)uv+\big(u^{p-7}+v^{p-7}\big)(uv)^2-\ldots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}.$$

而(13)右第一项正是由此式第一项 $\big(u^{p-3}+v^{p-3}\big)$ 转化而来，于是显见有 $k_0=1$. 事实上，只要注意到 $(u+v)^{p-3}$ 是由 $\big(u^{p-3}+v^{p-3}\big)$ 转化而来的，观察(11)向(13)之转化，显然有

$$k_0=\frac{1}{p}\Big\langle\binom{p-1}{1}+1\Big\rangle=1. \tag{14}$$

现在来证明 $\big|k_{(p-3)/2}\big|=1$. 首先易见 $k_{(p-3)/2}$ 是当 $j=2,4,6,\ldots,p-1$ 时，(11)中的 u^j+v^j 向(13)中的 $(u+v)^j$ 转化时生成的以 uv 为因子，不以 $u+v$ 为因子的项（简称 uv 项）的系数的代数和。我们用 σ_j 表示 uv 项的系数，显见 σ_j 亦即 (12)中的 $L_{j/2}$. 例如

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$，则 $\sigma_2=-2$; $u^4+v^4=(u+v)^4-4(u+v)^2uv+2(uv)^2$，则 $\sigma_4=2$;

我们先根据(12)挑出(11)两端的 uv 项，即

$$\Psi(p,u,v)\text{的}uv\text{项}=\frac{1}{puv}\Big\{0-\Big\langle\sigma_{p-1}(uv)^{(p-1)/2}-\sigma_{p-3}(uv)^{(p-3)/2}uv+\sigma_{p-5}(uv)^{(p-5)/2}(uv)^2-$$
$$\cdots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2uv(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\Big\rangle\Big\},$$
$$=\frac{1}{p}\Big\{0-\Big\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\ldots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\Big\rangle\Big\}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{15}$$

再由(15)得到

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\Big\{0-\Big\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\ldots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\Big\rangle\Big\}, \tag{16}$$

现在来考察 σ_j 的变化规律。首先注意到 $j\ge4$ 时，有

$$u^j+v^j=\big(u^2+v^2\big)\big(u^{j-2}+v^{j-2}\big)-\big(u^{j-4}+v^{j-4}\big)(uv)^2. \tag{17}$$

注意到 j 为偶数，我们先写出(17)两端的 uv 项，即

$$\sigma_j(uv)^{j/2}=\sigma_2uv\,\sigma_{j-2}(uv)^{(j-2)/2}-\sigma_{j-4}(uv)^{(j-4)/2}(uv)^2=(\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4})(uv)^{j/2}. \tag{18}$$

由(18)易见有 $\sigma_j=\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}$，再由 $\sigma_2=-2$，有

$$\sigma_j=-2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}. \tag{19}$$

由(19)显然有 $\sigma_6=-2\sigma_4-\sigma_2=-2(2)-(-2)=-2$，$\sigma_8=-2\sigma_6-\sigma_4=-2(-2)-2=2$，$\sigma_{10}=-2\sigma_8-\sigma_6=-2(2)-(-2)=-2$，$\sigma_{12}=-2\sigma_{10}-\sigma_8=-2(-2)-2=2$，…，从 $j=2$ 起，σ_j 按照 –2，2，–2，2，… 之规律排列，$j/2$ 为奇，$\sigma_j=-2$，$j/2$ 为偶，$\sigma_j=2$. 于是显见，$(p-1)/2$ 为奇数时(16)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\{0-\langle(-2)-2+(-2)-2+\ldots+(-2)-1\rangle\}, \tag{20}$$

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(-2)\frac{p-1}{2}-1\right\rangle\right\}=1; \tag{21}$$

$(p-1)/2$ 为偶数时(16)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\{0-\langle 2-(-2)+2-(-2)+\ldots+2+1\rangle\}, \tag{22}$$

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(2)\frac{p-1}{2}+1\right\rangle\right\}=-1. \tag{23}$$

至此已有 $k_0=|k_{(p-3)/2}|=1$. 由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u+v,\ uv)=1$，$((u+v)^2,\ uv)=1$，再由定理 3 有 $\left(\sum_{i=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}-i}(uv)^i,\ (u+v)^2uv\right)=1$. 因(13)即 $\Psi(p,u,v)=\sum_{i=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}-i}(uv)^i$，于是有 $(\Psi(p,u,v),\ (u+v)^2uv)=1$，再注意到 $(u+v,\ uv)=1$，显见(2)成立。

如若 $(u+v,\ p)=1$，由(2)容易看出有 $((u+v)^{p-1},\ puv\Psi(p,u,v))=1$，再由定理 1 显然有 $((u+v)^{p-1}-puv\Psi(p,u,v),\ (u+v)^{p-1}puv\Psi(p,u,v))=1$. 由此易见 (3),(4) 成立。

如若 $(u+v,\ p)=p$，由(2)容易看出有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ uv\Psi(p,u,v)\right)=1$，再由定理 1 显然有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\Psi(p,u,v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}uv\Psi(p,u,v)\right)=1$，注意到此时 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ p\right)=p$，于是易见(5),(6)成立。证毕。将 v 换成 $-v$，本定理仍成立，其形式称为减法形式，写为：

$$\Psi(p,u,-v)=\frac{(u-v)^p-(u^p-v^p)}{-(u-v)puv},\qquad u^p-v^p=(u-v)\langle(u-v)^{p-1}+puv\Psi(p,u,-v)\rangle.$$

定理 8　a,b 为正整数，$p>3$ 为奇素数，令 $\Psi(p,a,b)=\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}$，有

$$\Psi(p,a,b)-\frac{(a+b)^{p-1}-(a^{p-1}+b^{p-1})}{2ab}<0.$$

证　被证式亦即 $$\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}-\frac{(a+b)^{p-1}-(a^{p-1}+b^{p-1})}{2ab}<0,$$

$$\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}-\frac{(a+b)^p-(a+b)(a^{p-1}+b^{p-1})}{(a+b)2ab}<0,$$

$$2\langle(a+b)^p-(a^p+b^p)\rangle-p\langle(a+b)^p-(a+b)(a^{p-1}+b^{p-1})\rangle<0,$$

$(p-2)\langle(a+b)^p-(a^p+b^p)\rangle-pab(a^{p-2}+b^{p-2})>0$，展开 $(a+b)^p$，显见成立。本定理证毕。

定理 9　a,b 为正整数，$a-2b>0$，$0<\varepsilon<1$，有 $1<\frac{a-b\varepsilon}{a-b}<2$.

证　由题给条件有 $0<2b<a$，$0<2b-b\varepsilon<a$，$0<b-b\varepsilon<a-b$，各项加上 $a-b$，得

$a-b<a-b\varepsilon<2(a-b)$, 再除以 $a-b$, 得本不等式。证毕。

3. 费马最后定理之证明

定理 10　$p>3$ 为奇素数，方程

$$x^p+y^p=z^p \tag{1}$$

无两两互素之正整数解 $x,y,z.$.

证　将(1)看成一个等式，考虑两两互素之正整数 x,y,z 具有怎样的结构及这些结构之间具有怎样的关系时，(1)才有可能成立。我们先寻找这些结构及关系，然后指出其中之矛盾。显然，不妨只考虑 $x<y$ 之情形。

3.1 两种情况

结论 1　若 $x=1,$　则(1)不能成立。　**证**　令 $x=1,\ z=(y+1)+t,\ t\geq 0$ 为整数，则(1)化为 $1+y^p=\langle(y+1)+t\rangle^p$. 显然，这是一个一定不能成立的式子。证毕。

令

$$\Psi(p,x,y)=\frac{(x+y)^p-(x^p+y^p)}{(x+y)pxy}, \tag{2}$$

则由定理 7 有：$x+y,\ xy,\ \Psi(p,x,y)$ 两两互素，即

$$(x+y,\ \ xy)=(x+y,\ \ \Psi(p,x,y))=(xy,\ \ \Psi(p,x,y))=1; \tag{3}$$

$(x+y,\ \ p)=1$ 时，(1)可化为

$$(x+y)\langle(x+y)^{p-1}-pxy\Psi(p,x,y)\rangle=z^p, \tag{4}$$

有

$$(x+y,\ \ (x+y)^{p-1}-pxy\Psi(p,x,y))=1; \tag{5}$$

$(x+y,\ \ p)=p$ 时，(1)可为

$$p(x+y)\left\langle\frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\Psi(p,x,y)\right\rangle=z^p, \tag{6}$$

有

$$\left(p(x+y),\ \ \frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\Psi(p,x,y)\right)=1. \tag{7}$$

由(4),(5),(6),(7)显见，应分以下两种情况进行讨论：

情况 I: $(x+y,\ \ p)=1;$

情况 II: $(x+y,\ \ p)=p.$

为揭示 z 与 $x+y$ 之间的关系，令

$$z=(x+y)-h, \tag{8}$$

显然 h 为正整数，于是(1)可化为

$$x^p+y^p=\langle(x+y)-h\rangle^p. \tag{9}$$

展开(9), 且注意到由(2)有 $(x+y)^p-(x^p+y^p)=(x+y)pxy\Psi(p,x,y)$, 易见有

$$h^p-\binom{p}{p-1}(x+y)h^{p-1}+\binom{p}{p-2}(x+y)^2h^{p-2}-\binom{p}{p-3}(x+y)^3h^{p-3}+\cdots$$
$$+\binom{p}{3}(x+y)^{p-3}h^3-\binom{p}{2}(x+y)^{p-2}h^2+\binom{p}{1}(x+y)^{p-1}h-(x+y)pxy\Psi(p,x,y)=0. \tag{10}$$

结论 2　只有当 $(h,\ \ p)=p$　而且 $((x+y)xy\Psi(p,x,y),\ \ p)=p$ 时，(10)才有可能成立，且

$(x+y,\ p)=p,\ (xy,\ p)=p,\ (\Psi(p,x,y),\ p)=p$ 不能同时有其二，或同时有其三。

证 除了左第一项外，(10)各项明显含因子 p，若 $(h,\ p)=1$，除以 p，左第一项化为分数，(10)一定不能成立；而 $(h,\ p)=p$ 时，若 $((x+y)xy\Psi(p,x,y),\ p)=1$，除以 p^2，左最后一项化为分数，(10)亦一定不能成立，第一命题为真。再由(3)知第二命题为真。 证毕。

结论 3 只有当 h 只在 $(x+y)pxy\Psi(p,x.y)$ 内选择因子时，(10)才有可能成立。

证 除了左最后一项外，(10)各项明显含有因子 h，显然，只有最后一项亦以 h 为因子，即 $\dfrac{(x+y)pxy\Psi(p,x,y)}{h}$ 为整数，(10)才有可能成立。而 $\dfrac{(x+y)pxy\Psi(p,x,y)}{h}$ 为整数，只有当 h 只在 $(x+y)pxy\Psi(p,x.y)$ 内选择因子时才有可能。证毕。

结论 4 对于**情况 I**， 1. 只有当

$$(h,\ x+y)=(x+y)^{1/p} \tag{11}$$

时，(10)才有可能成立；2. 令 k,m 为正整数且分别表示 $xy\Psi(p,x,y)$ 和 h 所含因子 p 之最高指数，即 $p^k\in xy\Psi(p,x,y)$ 且 $\left(\dfrac{xy\Psi(p,x,y)}{p^k},\ p\right)=1$，$p^m\in h$ 且 $\left(\dfrac{h}{p^m},\ p\right)=1$，则只有当 $k=m$ 时，(10)才有可能成立。 **证** 除以 $(x+y)$，(10)化为

$$\frac{h^p}{x+y}-\binom{p}{p-1}h^{p-1}+\binom{p}{p-2}(x+y)h^{p-2}-\binom{p}{p-3}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots$$
$$+\binom{p}{3}(x+y)^{p-4}h^3-\binom{p}{2}(x+y)^{p-3}h^2+\binom{p}{1}(x+y)^{p-2}h-pxy\Psi(p,x,y)=0. \tag{12}$$

只有左第一项亦为整数，(12)才有可能成立，而显然只有 $(h,\ x+y)\neq 1$，左第一项才有可能为整数。本**情况**有 $(x+y,\ pxy\Psi(p,x,y))=1$，所以(12)左最后一项不再含有 $(x+y)$ 之任何素因子，而由 $(h,\ x+y)\neq 1$ 知(12)左第二项必含 $(x+y)$ 之某些素因子且左第三项至倒数第二项明显含 $(x+y)$ 之全部因子，于是，若 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=t\neq 1$，除以 t 的一个素因子 t_1，左最后一项化为分数，(12)一定不能成立。于是，无疑，只有 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=1$，(12)才有可能成立。这里我们注意到，由(5)知本**情况** $x+y$ 为一个 p 次幂是(4)成立之必要条件，所以 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=1$ 可化为 $\left(\left\langle\dfrac{h}{(x+y)^{1/p}}\right\rangle^p,\ \left\langle(x+y)^{1/p}\right\rangle^p\right)=1$，由此有 $\left(\dfrac{h}{(x+y)^{1/p}},\ (x+y)^{1/p}\right)=1$，$(h,\ (x+y)^{2/p})=(x+y)^{1/p}$，易见第一命题为真；若 $k>m$，除以 p^{m+2}，左倒数第二项化为分数，(12)一定不能成立；若 $k<m$，除以 p^{m+1}，左最后一项化为分数，(12)亦一定不能成立。而当 $k=m$ 时，除以 $p^{m+\zeta}$，ζ 为正整数，当 $\zeta=1$ 时，(12)无分数项，当 $\zeta\geq 2$ 时，左最后两项同时化为分数，(12)有可能成立。显见第二命题为真。证毕。

结论 5 对于**情况 II**，只有当

$$(h,\ p(x+y))=\langle p(x+y)\rangle^{1/p} \tag{13}$$

时，(10)才有可能成立。 **证** 除以 $p(x+y)$，(10)化为

$$\frac{h^p}{p(x+y)}-\frac{\binom{p}{p-1}}{p}h^{p-1}+\frac{\binom{p}{p-2}}{p}(x+y)h^{p-2}-\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots$$
$$+\frac{\binom{p}{3}}{p}(x+y)^{p-4}h^3-\frac{\binom{p}{2}}{p}(x+y)^{p-3}h^2+\frac{\binom{p}{1}}{p}(x+y)^{p-2}h-xy\Psi(p,x,y)=0. \tag{14}$$

p 为奇素数，$\binom{p}{k}\Big/p$ 一定为整数，易见除了左第一项外，(14)各项皆为整数。无疑，只有左第一项亦为整数，(14)才有可能成立。而显见，只有 $\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1,$ 左第一项才有可能为整数。本**情况** $\left(p(x+y),\ xy\Psi(p,x,y)\right)=1,$ 所以(14)左最后一项不再含 $p(x+y)$ 之任何素因子，而由 $\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1$ 知左第二项必含 $p(x+y)$ 之某些素因子，且左第三项至倒数第二项明显含 $p(x+y)$ 之全部因子，若 $\left(\dfrac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=t\neq 1,$ 除以 t 的一个素因子 t_1，左最后一项化为分数，(14) 一定不能成立。至此显然，只有 $\left(\dfrac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=1,$ (14)才有可能成立。我们注意到，由(7)显见本**情况** $p(x+y)$ 为一个 p 次幂是(6)成立的必要条件，于是显见 $\left(\dfrac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=1$ 可化为 $\left(\left\langle\dfrac{h}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}}\right\rangle^p,\ \left\langle\langle p(x+y)\rangle^{1/p}\right\rangle^p\right)=1$ 且由此易见有 $\left(\dfrac{h}{\langle p(x+y)\rangle^{1/p}},\ \langle p(x+y)\rangle^{1/p}\right)=1,$ $\left(h,\ \langle p(x+y)\rangle^{2/p}\right)=\langle p(x+y)\rangle^{1/p},$ 本结论成立。证毕。

为揭示 x,y,z,h 之间的关系，令

$$x=z-r, \tag{15}$$

$$y=z-s, \tag{16}$$

显然 r,s 为正整数。于是(1),(9)分别化为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=z^p, \tag{17}$$

$$(z-r)^p+(z-s)^p=\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle-h\}^p. \tag{18}$$

注意到 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$，于是(17)可写为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle\}^p. \tag{19}$$

由(18),(19)有

$$h=z-(r+s), \tag{20}$$

且由此有

$$z-r=s+h, \tag{21}$$

$$z-s=r+h, \tag{22}$$

$$z=r+s+h. \tag{23}$$

于是(17)又可写为

$$(s+h)^p+(r+h)^p=(r+s+h)^p. \tag{24}$$

$$(s+h)^p+(r+h)^p=z^p. \tag{24-1}$$

展开(17)有

$$z^p-\binom{p}{1}(r+s)z^{p-1}+\binom{p}{2}(r^2+s^2)z^{p-2}-\binom{p}{3}(r^3+s^3)z^{p-3}+\cdots$$
$$+\binom{p}{p-3}(r^{p-3}+s^{p-3})z^3-\binom{p}{p-2}(r^{p-2}+s^{p-2})z^2+\binom{p}{p-1}(r^{p-1}+s^{p-1})z-(r^p+s^p)=0. \tag{25}$$

结论 6 对(17)之讨论，只考虑 z,r,s 三者两两互素之情形则可。**证** 由(3),(15),(16)有

$$(z-r,\ z-s)=(z-r,\ z)=(z-s,\ z)=1.$$

首先注意到，只有当 $(z,\ r)=1$ 时，$(z-r,\ z)=1$ 才有可能成立，因如若 $(z,\ r)=t\neq 1,$ 则一定有 $(z-r,\ z)=t\neq 1,$ 与 $(z-r,\ z)=1$ 相悖。同理，只有当 $(z,\ s)=1$ 时，$(z-s,\ z)=1$ 才有可能成立。且易见当 $(z,\ rs)=1$ 时，只有 $(r,\ s)=1,$ (25)才有可能成立。因如若 $(r,\ s)=t\neq 1,$ 除了左第一项外，(25)各项均含因子 $t,$ 除以 $t,$ 左第一项将化为分数。证毕。

由定理 7, 且注意到 $(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle$, 易见(17)亦可写为

$$\langle (z-r)+(z-s)\rangle\left\{\langle (z-r)+(z-s)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right\}=z^p, \tag{26}$$

$$\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}\left(\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=z^p, \tag{27}$$

$((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时，还可写为

$$p\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}\left(\frac{\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=z^p; \tag{28}$$

且 $((z-r)+(z-s),\ p)=1$ 时和 $((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时，分别有

$$(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ \{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s))=1, \tag{29}$$

$$\left(p\{z+\langle z-(r+s)\rangle\},\ \frac{\{z+\langle z-(r+s)\rangle\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{30}$$

结论 7　对于**情况 I**, 即 $((z-r)+(z-s),\ p)=1$ 时，只有令

$$z=qA, \tag{31}$$

$$r+s=qB, \tag{32}$$

$$(A,\ B)=1, \tag{33}$$

$$h=q(A-B), \tag{34}$$

$$(q,\ A(A-B))=1, \tag{35}$$

$$(z-r)+(z-s)=q^p, \tag{36}$$

$$(h,\ (z-r)+(z-s))=q, \tag{37}$$

A,B,q,α 为正整数，(27)才有可能成立。

证　1. 若 $(z,\ r+s)=1$, 由定理 1 有 $(z-(r+s),\ z)=1$, $(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ z)=1$, (27)左出现与右互素之因子，注意到(29), 为使(27)有可能成立，只有令 $(z,\ r+s)=q\neq 1$, $z=qA$, $r+s=qB$, $(A,\ B)=1$, A,B,q 为正整数。于是，(27),(29)分别化为

$$\langle A+(A-B)\rangle\left\{q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right\}=q^{p-1}A^p, \tag{38}$$

$$\left(q\langle A+(A-B)\rangle,\ q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{39}$$

2. 由(39)有 $(A+(A-B),\ q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s))=1$ 以及 $(q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s),\ q^{p-1})=1$ 且由 $(A,\ B)=1$ 以及定理 1 有 $(A-B,\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A^p)=1$, 于是显见，只有当

$$A+(A-B)=q^{p-1}, \tag{40}$$

$$q^{p-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)=A^p \tag{41}$$

时(38)才有可能成立；

3. 而由 $(A,\ B)=1$ 及定理 1 有 $(A-B,\ A)=1$, $(A+(A-B),\ A(A-B))=1$, 于是不难看出只有 $(q^{p-1},\ A(A-B))=1$, 亦即只有(35)成立，(40)才有可能成立。

4. 由(31),(32)易见(20)可化为(34); 由(31),(32),(40)及 $(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle$ 易见(36)成立；由(34),(35),(36),(15),(16)易见(11)可写为(37). 证毕。

结论 8　对于**情况 II**, 即 $((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时，只有令

$$z=q\,p^{\theta}A, \tag{42}$$

$$r+s=q\,p^{\theta}B, \tag{43}$$

$$(q,\ \ p)=1, \tag{44}$$

$$(A,\ \ B)=1, \tag{45}$$

$$h=q\,p^{\theta}(A-B), \tag{46}$$

$$(q\,p^{\theta},\ \ A(A-B))=1, \tag{47}$$

$$(z-r)+(z-s)=q^{p}\,p^{p\theta-1}, \tag{48}$$

$$(h,\ \ p\langle(z-r)+(z-s)\rangle)=q\,p^{\theta}, \tag{49}$$

A,B,q,θ,α 为正整数， (27),(28)才有可能成立。

证 1. 本**情况**亦只有$(z,\ \ r+s)\neq 1$, (27)才有可能成立，否则亦会出现左右因子互素之情况；本**情况**还须有$(z,\ \ p)=p$, 否则，(27)将左含因子 p, 右不含因子 p; 且显见本**情况**还须有 $(r+s,\ \ p)=p$, 否则，若$(z,\ \ p)=p$, 而 $(r+s,\ \ p)=1$, 由定理 4 有 $(z-(r+s),\ \ p)=1$及$(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ \ p)=1$, 亦即有$((z-r)+(z-s),\ \ p)=1$, 与$((z-r)+(z-s),\ \ p)=p$ 相悖。于是只有令 $(z,\ \ r+s)=q\,p^{\theta}$, $z=q\,p^{\theta}A$, $r+s=q\,p^{\theta}B$, $(q,\ \ p)=1$, $(A,\ \ B)=1$, A,B,q,θ 为正整数，(27),(28)才有可能成立。于是(28)和(30)化为

$$\langle A+(A-B)\rangle\left\{q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right\}=q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}A^{p}, \tag{50}$$

$$\left(q\,p^{\theta+1}\langle A+(A-B)\rangle,\ \ q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{51}$$

2. 由(51)有$\left(A+(A-B),\ \ q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)\right)=1$ 及$\left(q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s),\ \ q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\right)=1$, 且由$(A,\ \ B)=1$及定理 1 有$(A-B,\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A^{p})=1$, 于是显见，只有当

$$A+(A-B)=q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}, \tag{52}$$

$$q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}\langle A+(A-B)\rangle^{p-1}-(z-r)(z-s)\Psi(p,z-r,z-s)=A^{p} \tag{53}$$

时(50)才有可能成立。

3. 而由$(A,\ \ B)=1$及定理 1 有$(A-B,\ \ A)=1$, $(A+(A-B),\ \ A(A-B))=1$, 不难看出只有$(q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1},\ \ A(A-B))=1$, 亦即(47)成立，(52)才有可能成立。

4. 由(42),(43)易见(20)可化为(46); 由(42),(43),(52)及$(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle$ 易见(48)成立；由(46),(47),(48),(15),(16)易见(13)可写为(49). 证毕。

(17)可写为

$$z^{p}-(z-r)^{p}=(z-s)^{p}, \tag{54}$$

$$z^{p}-(z-s)^{p}=(z-r)^{p}. \tag{55}$$

由定理 7 之减法形式易见(54),(55)可分别化为

$$\langle z-(z-r)\rangle\left\{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\}=(z-s)^{p}, \tag{56}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle\left\{\langle z-(z-s)\rangle^{p-1}+pz(z-s)\Psi(p,z,-(z-s))\right\}=(z-r)^{p}. \tag{57}$$

展开(24)有

$$\begin{aligned}&h^{p}-\binom{p}{p-2}\langle(r+s)^{2}-(r^{2}+s^{2})\rangle\,h^{p-2}-\binom{p}{p-3}\langle(r+s)^{3}-(r^{3}+s^{3})\rangle\,h^{p-3}-\cdots\\&-\binom{p}{3}\langle(r+s)^{p-3}-(r^{p-3}+s^{p-3})\rangle\,h^{3}-\binom{p}{2}\langle(r+s)^{p-2}-(r^{p-2}+s^{p-2})\rangle\,h^{2}\\&-\binom{p}{1}\langle(r+s)^{p-1}-(r^{p-1}+s^{p-1})\rangle h-\langle(r+s)^{p}-(r^{p}+s^{p})\rangle=0.\end{aligned} \tag{58}$$

除以 prs, (58)可化为

$$\frac{h^p}{prs}-2\frac{\binom{p}{p-2}}{p}h^{p-2}-3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(r+s)h^{p-3}-\cdots-\frac{\binom{p}{3}\left\langle(r+s)^{p-3}-\left(r^{p-3}+s^{p-3}\right)\right\rangle}{prs}h^3$$
$$-\frac{\binom{p}{2}\left\langle(r+s)^{p-2}-\left(r^{p-2}+s^{p-2}\right)\right\rangle}{prs}h^2-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h-(r+s)\Psi(p,r,s)=0. \qquad (59)$$

结论 9 $p>3$ 时，若得到 $\frac{h^p}{prs}=r+s=2h$ 或 $\frac{h^p}{prs}=\frac{r+s+2h}{p}$，则(59)一定不能成立；若得到 $\frac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\Psi(p,r,s)$ 或 $\frac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\frac{\Psi(p,r,s)}{p}$，则(59)亦一定不能成立。

证 r,s,h 为正整数，显然有 $(r+h)+2h\le 2h(r+h)$. 于是 $p>3$ 时，有

$$r+s+2h\le 2h(r+s)<3(r+s)h<3(r+s)h^{p-3}<3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(r+s)h^{p-3}.$$

所以若得到 $\frac{h^p}{prs}=r+s+2h$, 有 $\frac{h^p}{prs}<3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(r+s)h^{p-3}$. 而若得到 $\frac{h^p}{prs}=\frac{r+s+2h}{p}$，更有 $\frac{h^p}{prs}<3\frac{\binom{p}{p-3}}{p}(r+s)h^{p-3}$，观察(59)，易见，得此二式，均使(59)左$<0$, 第一命题为真。

r,s 为正整数， $p>3$ 为奇素数，由定理 8 有 $\Psi(p,r,s)-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{2rs}<0$, 亦即

$$2h\Psi(p,r,s)-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h<0,$$
$$(r+s+2h)\Psi(p,r,s)-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h-(r+s)\Psi(p,r,s)<0.$$

显然，得 $\frac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\Psi(p,r,s)$，则有 $\frac{h^p}{prs}-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h-(r+s)\Psi(p,r,s)<0$;

得 $\frac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\frac{\Psi(p,r,s)}{p}$, 则更有 $\frac{h^p}{prs}-\frac{(r+s)^{p-1}-\left(r^{p-1}+s^{p-1}\right)}{rs}h-(r+s)\Psi(p,r,s)<0.$

易见，得此二式，均使(59)左<0, 第二命题为真。证毕。

结论 10 只有 r^p+s^p 含因子 z, (25)才有可能成立。 **证** 若 r^p+s^p 不含因子 z，除以 z, 左最后一项化为分数，(25)一定不能成立。 证毕。

3.2 三个模型

由结论 2 易见，应建立三个模型，分别讨论：

第一模型：$(xy,\ p)=p$,

第二模型：$(x+y,\ p)=p$,

第三模型：$(\Psi(p,x,y),\ p)=p$.

已显然，或见于下文，**第一模型**及**第三模型**在**情况 I** 内，**第二模型**在**情况 II** 内。而且将由(42)看出 $(z,\ p)=p$ 之情形含在**第二模型**内。

3.2.1 第一模型：$(xy,\ p)=p$

因 $(x,\ y)=1$, 显然，$(xy,\ p)=p$ 亦即 $(x,\ p)=p$ 或 $(y,\ p)=p$. 因 x,y 在(1)中对称，讨论其一则可，我们讨论 $(y,\ p)=p$. 无疑，本模型在**情况 I** 内，因为由(3)易见此时有

$$(pxy,\ (x+y)\Psi(p.x,y))=1, \qquad (60)$$

结论 11　本模型，只有令

$$r = p^{p\theta-1}T^p, \tag{61}$$

$$s = D^p, \tag{62}$$

$$h = q\,p^{\theta}TD\omega, \tag{63}$$

$\omega \in \Psi(p,x,y)$，　$\omega > 1$，　T, D, θ, ω 为正整数，　T, D, p, q, ω 两两互素，(27)才有可能成立。

证 1. 本模型有 $(z-s,\ \ p) = p$，显然只有 $(z-(z-r),\ \ p) = p$，(56)才有可能成立，因如若有 $(z-(z-r),\ \ p) = 1$，由定理 7 有 $\left(\langle z-(z-r)\rangle^{p-1} + pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r)),\ \ p\right) = 1$，(56)左与 p 互素，右却以 p 为因子，一定不能成立。当 $(z-(z-r),\ \ p) = p$ 时，(56)可写为

$$p\langle z-(z-r)\rangle\left\{\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p} + z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\} = (z-s)^p, \tag{64}$$

且由定理 7 有 $\left(p\langle z-(z-r)\rangle,\ \ \left\{\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p} + z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\}\right) = 1$. 于是，显然，为使(56)有可能成立，我们只有令

$$p\langle z-(z-r)\rangle = (p^{\theta}T)^p, \tag{65}$$

$$\frac{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}}{p} + z(z-r)\Psi(p,z,-(z-r)) = N^p, \tag{66}$$

$$z - s = p^{\theta}TN, \tag{67}$$

$$(T,\ \ N) = 1. \tag{68}$$

$$(TN,\ \ p) = 1. \tag{69}$$

易见(65)可化为(61).

2. 观察(57)，由 $(z,\ \ z-s) = 1$ 及定理 1 有 $(z-(z-s),\ \ z(z-s)) = 1$，因 $(z-s,\ \ p) = p$，由定理 4 有 $(z-(z-s),\ \ p) = 1$，再由定理 7 有 $\left(\langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p,z,-(z-s)),\ \ p\right) = 1$ 及 $\left(z-(z-s),\ \langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s))\right) = 1$，注意到 $(z-r,\ \ z-s) = 1$ 及本模型有 $(z-r,\ \ p) = 1$，显然，为使(57)有可能成立，我们只有令：

$$z - (z-s) = D^p, \tag{70}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p,z-(z-s)) = E^p, \tag{71}$$

$$z - r = DE, \tag{72}$$

$$(D,\ \ E) = 1, \tag{73}$$

$$(DE,\ \ p^{\theta}TN) = 1. \tag{74}$$

易见(70)可化为(62).

3. 由(61),(62)及(72),(67)有

$$z - p^{p\theta-1}T^p = DE, \tag{75}$$

$$z - D^p = p^{\theta}TN, \tag{76}$$

且由此有 $DE + p^{p\theta-1}T^p = D^p + p^{\theta}TN$，　$DE - D^p = p^{\theta}TN - p^{p\theta-1}T^p$ 及

$$D(E - D^{p-1}) = p^{\theta}T(N - p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}). \tag{77}$$

由(73)有 $(E,\ \ D^{p-1}) = 1$，由结论 1 有 $x \neq 1$，再由(15),(72)知有　$E\,D^{p-1} \neq 1$，于是由定理 5 有 $E - D^{p-1} \neq 0$，又因 $p^{\theta}T \neq 0$，显然(77)可写为

$$\frac{D}{p^{\theta}T}=\frac{N-p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}}{E-D^{p-1}}. \tag{78}$$

由(74)有$(D,\ p^{\theta}T)=1$, 按定理 6 对 (78) 做 U 变换，令$U\neq 0$ 为整数，

$$N-p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}=UD, \tag{79}$$

$$E-D^{p-1}=U\ p^{\theta}T, \tag{80}$$

于是有 $N=p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1}+UD,\ \ E=D^{p-1}+U\ p^{\theta}T$, 再由(72),(67)易见有

$$z-r=D^{p}+U\ p^{\theta}TD, \tag{81}$$

$$z-s=p^{p\theta-1}T^{p}+U\ p^{\theta}TD, \tag{82}$$

再由(61),(62)有

$$z=p^{p\theta-1}T^{p}+D^{p}+U\ p^{\theta}TD. \tag{83}$$

由(61),(62),(83)易见(20)可写为

$$h=U\ p^{\theta}TD, \tag{84}$$

且因$h>0,\ \ p^{\theta}TD>0$, 显然须有$U>0$.

4. 注意到，由(68),(69)有 $(N,\ pT)=1$, 由此有 $(N,\ p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1})=1$, 再由定理 1 有 $(N-p^{(p-1)\theta-1}T^{p-1},\ NTp\ )=1$, 再由(79)有

$$(UD,\ NTp)=1. \tag{85}$$

由(73)有 $(E,\ D^{p-1})=1$, 再由定理 1 有 $(E-D^{p-1},\ DE)=1$, 再由(80)有

$$(U\ p^{\theta}T,\ DE)=1. \tag{86}$$

由(85),(86)有

$$(U,\ DE\ p^{\theta}TN)=1. \tag{87}$$

由(69)及(85),(86)有 T,D,p,U 两两互素。

5. 观察(84), 我们依据结论 3 讨论U 之因子，以确定 h 之因式结构。

1). 由(87),(72),(67),(15),(16)有 $(U,\ pxy)=1$.

2). 由(37),(15),(16)有 $(h,\ x+y)=q$, 且有 $q\in U$. 这是因为，由(72),(67),(15),(16)易见 $p^{\theta}TD\in pxy$, 而 $q\in x+y$, 于是由(60)有 $(q,\ p^{\theta}TD)=1$.

3). 注意到，由(21),(22)知(36)可写为 $(s+h)+(r+h)=q^{p}$, 即

$$r+s+2h=q^{p}. \tag{88}$$

若 h 不从 $\Psi(p,x,y)$ 得到因子，显然只能是 $U=q,\ \ h=q\ p^{\theta}TD$, 由此及(61),(62),(88)易得 $\frac{h^{p}}{prs}=r+s+2h$, 由结论 9 知 $p>3$ 时(59)一定不能成立。令 h 从 $\Psi(p,x,y)$ 得到因子 ω, 且 $p>3$ 时 $\omega>1$, 因 $p^{\theta}TD\in pxy,\ \ \omega\in\Psi(p,x,y)$, 由(60)有 $(p^{\theta}TD,\ \omega)=1$, 显然 $\omega\in U$, 有

$$U=q\omega, \tag{89}$$

且(84)随之化为(63).

4). 观察(89), 因为 $\omega\in\Psi(p,x,y)$, 而 $q\in x+y$, 由(3)知 $(q,\ \omega)=1$. 因已得 T,D,p,U 两两互素，至此显然有 T,D,p,q,ω 两两互素。本结论证毕。

结论 12　只有当 $\omega^{p}>\Psi(p,r,s)$ 时，(59)才有可能成立。 **证**　当 $\omega^{p}=\Psi(p,r,s)$ 时，由(61),(62),(63),(88)易得 $\frac{h^{p}}{prs}=(r+s+2h)\Psi(p,r,s)$; 由结论 9 知，此时(59)一定不能成立；而当$\omega^{p}<\Psi(p,r,s)$ 时， 令 $\omega^{p}=\frac{\Psi(p,r,s)}{t}$, $t>1$为实数，这时由(61),(62),(63),(88) 易得

$\frac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\frac{\Psi(p,r,s)}{t}$. 因 $t>1$, 由结论 9 知，此时更有(59)左<0, (59)更一定不能成立。显然，只有 当$\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，(59)才有可能成立。证毕。

结论 13 当$\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，有 r^p+s^p 不含因子 A., $A\in z$, 于是(25)一定不能成立。

证 由定理 7 有 $r^p+s^p=(r+s)\langle\langle(r+s)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\rangle\rangle$, 再由(31),(32),(33)知只需证明

$$(Bq)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\text{不含因子 }A. \tag{90}$$

由(34),(63)有

$$A-B=p^{\theta}TD\omega, \tag{91}$$

由(33)及定理 1 有 $(A-B,\ AB)=1$, 于是有

$$(p^{\theta}TD\omega,\ AB)=1. \tag{92}$$

由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$ 及(31),(36),(20),(63)有

$$A=q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega. \tag{93}$$

于是由(61),(62),(91)易见(90)可写为

$$(A-p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-(p^{\theta}TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }A. \tag{94}$$

展开(94)中的 $(A-p^{\theta}TD\omega)^{p-1}$, 易见只需证明

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-(p^{\theta}TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }A. \tag{95}$$

由(93)知(95)亦即

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-(p^{\theta}TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega. \tag{96}$$

因子 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$ 有两个最基本的特征，第一，它是一个两项式，第二，它的首项系数为 1. 于是显然，在 $(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-(p^{\theta}TD)^p\Psi(p,r,s)$ 内寻找该因子的最直接的方法就是将其它因子从 q^{p-1} 旁边拨离开。于是 $(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-(p^{\theta}TD)^p\Psi(p,r,s)$ 只能被分解为

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}\left\langle q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\frac{\Psi(p,r,s)}{\omega^p}\right\rangle.$$

第一因子$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}$不含因子 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$, 因为由(92),(93)有

$$(p^{\theta}TD\omega,\ q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega)=1; \tag{97}$$

第二因子 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\frac{\Psi(p,r,s)}{\omega^p}$ 很象 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$, 且显然，当$\omega^p=\Psi(p,r,s)$ 时，它恰好就是 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$, 然而，我们已有结论 12, 本结论之前提是 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$. 于是显然，(96)成立。本结论证毕。本模型证毕。

我们注意到，当 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，有$0<\frac{\Psi(p,r,s)}{\omega^p}<1$, 且由 $(r+s+2h)-2h>0$ 及(88), (63)易见 $q^p-2q\,p^{\theta}TD\omega>0$, 即 $q^{p-1}-2\,p^{\theta}TD\omega>0$. 于是由定理 9 有

$$1<\frac{q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\frac{\Psi(p,s)}{\omega^p}}{q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega}<2. \tag{98}$$

3.2.2 第二模型：$(x+y,\ p)=p$

显然，本模型在**情况 II** 内，且由(3)有

$$(p(x+y),\ xy\Psi(p,x,y))=1. \tag{99}$$

结论 14 本模型，只有令

$$r = T^p, \tag{100}$$

$$s = D^p, \tag{101}$$

$$h = q\, p^\theta TD\omega, \tag{102}$$

$\omega \in \Psi(p, x, y)$, $\omega > 1$, T, D, θ, ω 为正整数，T, D, p, q, ω 两两互素，(27)才有可能成立。

证 观察(56),(57), 本模型 $(xy,\ p)=1$, 亦即 $((z-r)(z-s),\ p)=1$, 易见，只有

$$\left(\langle z-(z-r)\rangle\left\{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1} + pz(z-r)\Psi(p, z, -(z-r))\right\},\ p\right)=1, \tag{103}$$

(56)才有可能成立；只有

$$\left(\langle z-(z-s)\rangle\left\{\langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p, z, -(z-s))\right\},\ p\right)=1, \tag{104}$$

(57)才有可能成立，否则此二式均将左含因子 p, 而右不含因子 p.

1. 观察(56), 因(103)包含 $(z-(z-r),\ p)=1$, 由定理 7 有

$$\left(z-(z-r),\ \langle z-(z-r)\rangle^{p-1} + pz(z-r)\Psi(p, z, -(z-r))\right)=1,$$

注意到 $(z-s,\ p)=1$, 显然，为使(56)有可能成立，我们只有令

$$z-(z-r)=T^p, \tag{105}$$

$$\langle z-(z-r)\rangle^{p-1} + pz(z-r)\Psi(p, z, -(z-r)) = N^p, \tag{106}$$

$$z-s=TN, \tag{107}$$

$$(T,\ N)=1, \tag{108}$$

$$(TN,\ p)=1. \tag{109}$$

易见(105)可化为(100).

2. 观察(57), 因(104)包含 $(z-(z-s),\ p)=1$, 由定理 7 有

$$\left(z-(z-s),\ \langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p, z-(z-s))\right)=1,$$

注意到 $(z-r,\ z-s)=1$ 及本模型 $(z-r,\ p)=1$, 显然, 为使(56), (57)有可能成立，只有令

$$z-(z-s)=D^p, \tag{110}$$

$$\langle z-(z-s)\rangle^{p-1} + pz(z-s)\Psi(p, z-(z-s)) = E^p, \tag{111}$$

$$z-r=DE, \tag{112}$$

$$(D,\ E)=1, \tag{113}$$

$$(DE,\ p)=1, \tag{114}$$

$$(DE,\ TN)=1. \tag{115}$$

(110)可化为(101).

3. 由(100),(101)及(112),(107)有

$$z-T^p=DE, \tag{116}$$

$$z-D^p=TN, \tag{117}$$

且由此有 $DE+T^p=D^p+TN$, $DE-D^p=TN-T^p$ 及

$$D(E-D^{p-1})=T(N-T^{p-1}). \tag{118}$$

由(113)有 $(E,\ D^{p-1})=1$, 由结论 1 有 $x \neq 1$, 再由(15),(113)有 $E\,D^{p-1} \neq 1$, 于是由定理 5 有 $E-D^{p-1} \neq 0$, 又因 $T \neq 0$, 显然(118)可写为

$$\frac{D}{T}=\frac{N-T^{p-1}}{E-D^{p-1}}. \tag{119}$$

由(115)有 $(D,\ T)=1$, 按定理 6 对(119)做 U 变换。令 $U \neq 0$, 为整数，

$$N-T^{p-1}=UD, \tag{120}$$

$$E-D^{p-1}=UT, \tag{121}$$

于是有 $N=T^{p-1}+UD,\ \ E=D^{p-1}+UT$，再由(112),(107)易见有

$$z-r=D^p+UTD, \tag{122}$$

$$z-s=T^p+UTD, \tag{123}$$

再由(100),(101)有

$$z=T^p+D^p+UTD. \tag{124}$$

由(100),(101),(124)易见(20)可写为

$$h=UTD, \tag{125}$$

因 $h>0,\ \ TD>0,$ 显然须有 $U>0.$

4. 由(108)有 $\left(N,\ T^{p-1}\right)=1,$ 再由定理 1 有 $\left(N-T^{p-1},\ NT\right)=1,$ 再由(121)有

$$\left(UD,\ NT\right)=1. \tag{126}$$

由(113)有 $\left(E,\ D^{p-1}\right)=1,$ 再由定理 1 有 $\left(E-D^{p-1},\ DE\right)=1,$ 再由(121)有

$$\left(UT,\ DE\right)=1. \tag{127}$$

由(126),(127)有

$$\left(U,\ DETN\right)=1 \tag{128}$$

及 T,D,U 两两互素。

5. 观察(125), 我们依据结论 3, 从讨论 U 之因子入手，确定 h 之因式结构。

1). 由(128),(112),(107),(15),(16)有 $\left(U,\ xy\right)=1;$

2). 由(49),(15),(16)有 $\left(h,\ p(x+y)\right)=q\,p^{\theta}$，且有 $q\,p^{\theta}\in U.$ 这是因为由(112),(107),(15)及(16)有 $TD\in xy,$ 而 $q\,p^{\theta}\in p(x+y),$ 由(99)知 $\left(q\,p^{\theta},\ TD\right)=1.$

3). 我们注意到，由(21),(22)易见(48)亦可写为 $\left(s+h\right)+\left(r+h\right)=q^p\,p^{p\theta-1}$，亦即

$$r+s+2h=q^p\,p^{p\theta-1}. \tag{129}$$

若 h 不在 $\Psi(p,x,y)$ 内得到因子，只能是 $U=q\,p^{\theta},\ \ h=q\,p^{\theta}TD,$ 由(100),(101),(102)(129)有 $\dfrac{h^p}{prs}=r+s+2h,$ 由结论 9 知 $p>3$ 时(59) 一定不能成立。令 h 从 $\Psi(p,x,y)$ 得到因子 $\omega,$ 且 $p>3$ 时， $\omega>1.$ 因 $TD\in xy,\ \ \omega\in\Psi(p,x,y),$ 由(3)有 $\left(TD,\ \omega\right)=1,$ 显见 $\omega\in U.$ 至此得到

$$U=q\,p^{\theta}\omega, \tag{130}$$

且(125)随之化为(102).

4). 观察(130), 因为 $q\,p^{\theta}\in p(x+y),$ 而 $\omega\in\Psi(p,x,y),$ 由(99)知 $\left(q\,p^{\theta},\ \omega\right)=1,$ 再由(44)及已得 T,D,U 两两互素，显然有 $T,D,p,\ q,\omega$ 两两互素。本结论证毕。

结论 15　只有当 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$ 时，(59)才有可能成立。　**证**　当 $\omega^p=\Psi(p,r,s)$ 时，由(100),(101),(102),(129) 易得出 $\dfrac{h^p}{prs}=\left(r+s+2h\right)\Psi(p,r,s);$ 由结论 9 知，此时(59) 一定不能成立。当 $\omega^p<\Psi(p,r,s)$ 时，令 $\omega^p=\dfrac{\Psi(p,r,s)}{t},\ \ t>1$ 为实数，由(100),(101),(102),(129) 易得 $\dfrac{h^p}{prs}=\left(r+s+2h\right)\dfrac{\Psi(p,r,s)}{t}.$ 因 $t>1,$ 由结论 9 知，此时更有(59)左$<0,$ (59)更不能成立。显然，只有 当 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，(59)才有可能成立。证毕。

结论 16　当 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，有 r^p+s^p 不含因子 $A.,\ \ A\in z,$ 于是(25)一定不能成立。

证　由定理 7 有 $r^p+s^p=\left(r+s\right)\left\langle\left(r+s\right)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\right\rangle,$ 再由(42),(43),(45)易见只需证

$$\left(Bq\,p^{\theta}\right)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\ \text{ 不含因子 } A. \tag{131}$$

由(46),(102)有

$$A-B=TD\omega, \tag{132}$$

由(45)及定理 1 有 $(A-B,\ AB)=1$, 于是有

$$(TD\omega,\ AB)=1. \tag{133}$$

由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$, (42),(48),(20),(102)有

$$A=q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega. \tag{134}$$

于是由(100),(101),(132)易见(131)可写为

$$(A-TD\omega)^{p-1}(qp^{\theta})^{p-1}-p(TD)^{p}\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子}\ A. \tag{135}$$

展开 $(A-TD\omega)^{p-1}$, 易见对(135)只需证明

$$(TD\omega)^{p-1}(qp^{\theta})^{p-1}-p(TD)^{p}\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子}\ A. \tag{136}$$

由(134)知(136)亦即

$$(TD\omega)^{p-1}(qp^{\theta})^{p-1}-p(TD)^{p}\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子}\ q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega. \tag{137}$$

因子 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega$ 有两个最基本的特征，一，它是一个两项式，二，其首项系数为 1. 显然，在 $(TD\omega)^{p-1}(qp^{\theta})^{p-1}-p(TD)^{p}\Psi(p,r,s)$ 内寻找该因子的最直接的方法就是将其它因子从 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}$ 旁边拨离开。于是，$(TD\omega)^{p-1}(qp^{\theta})^{p-1}-p(TD)^{p}\Psi(p,r,s)$ 只能被被分解为

$$p(TD\omega)^{p-1}\left\langle q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega\frac{\Psi(p,r,s)}{\omega^{p}}\right\rangle.$$

第一因子 $p(TD\omega)^{p-1}$ 不含因子 $q^{p-1}p^{(p-1\theta-1)}-TD\omega$, 因为由(133),(134)有

$$(TD\omega,\ q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega)=1. \tag{138}$$

第二因子 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega\dfrac{\Psi(p,r,s)}{\omega^{p}}$ 很象 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega$, 且显然，$\omega^{p}=\Psi(p,r,s)$ 时，它恰好就是 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega$, 然而我们已有结论 15, 本结论的前提是 $\omega^{p}>\Psi(p,r,s)$. 于是显然，(136)成立。本结论证毕。本模型证毕。

我们注意到，当 $\omega^{p}>\Psi(p,r,s)$时，有 $0<\dfrac{\Psi(p,r,s)}{\omega^{p}}<1$, 且由 $(r+s+2h)-2h>0$ 及 (129), (102)易见 $q^{p}p^{p\theta-1}-2qp^{\theta}TD\omega>0$, 即 $q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-2TD\omega>0$. 于是由定理 9 有

$$1<\frac{q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega\dfrac{\Psi(p,s)}{\omega^{p}}}{q^{p-1}p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega}<2. \tag{139}2$$

3.2.3. 第三模型： $(\Psi(p,x,y),\ p)=p.$

显然，本模型在**情况 I** 内，因为由(3)知，此时有

$$(p\Psi(p,x,y),\ (x+y)xy)=1. \tag{140}$$

结论 17　本模型，只有令

$$r=T^{p}, \tag{141}$$

$$s=D^{p}, \tag{142}$$

$$h=qp^{\theta}TD\omega, \tag{143}$$

$p^{\theta}\omega\in\Psi(p,x,y)$, T,D,θ,ω 为正整数，T,D,p,q,ω 两两互素，(27)才有可能成立

证　观察(56),(57), 本模型 $(xy,\ p)=1$, 亦即 $((z-r)(z-s),\ p)=1$, 易见，只有

$$\left(\langle z-(z-r)\rangle\left\{\langle z-(z-r)\rangle^{p-1}+pz(z-r)\Psi(p,z,-(z-r))\right\},\ p\right)=1, \tag{144}$$

(56)才有可能成立；只有

$$\left(\left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle\left\{\left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-s\right)\Psi\left(p,z,-\left(z-s\right)\right)\right\},\ \ p\right)=1, \tag{145}$$

(57)才有可能成立，否则此二式均左含因子 p，而右不含因子 p.

1. 观察(56)，注意到(144)包含 $\left(z-\left(z-r\right),\ \ p\right)=1$，由定理 7 有

$$\left(z-\left(z-r\right),\ \left\langle z-\left(z-r\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-r\right)\Psi\left(p,z,-\left(z-r\right)\right)\right)=1,$$

且注意到 $\left(z-s,\ \ p\right)=1$，显然，为使(56)有可能成立，我们只有令

$$z-\left(z-r\right)=T^{p}, \tag{146}$$

$$\left\langle z-\left(z-r\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-r\right)\Psi\left(p,z,-\left(z-r\right)\right)=N^{p}, \tag{147}$$

$$z-s=TN, \tag{148}$$

$$\left(T,\ \ N\right)=1, \tag{149}$$

$$\left(TN,\ \ p\right)=1. \tag{150}$$

(146)可化为(141).

2. 观察(57)，注意到(145)包含 $\left(z-\left(z-s\right),\ \ p\right)=1$. 于是由定理 7 有

$$\left(z-\left(z-s\right),\ \left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-s\right)\Psi\left(p,z-\left(z-s\right)\right)\right)=1,$$

注意到 $\left(z-r,\ \ z-s\right)=1$ 及本模型 $\left(z-r,\ \ p\right)=1$，显然，为使(56),(57)有可能成立，只有令

$$z-\left(z-s\right)=D^{p}, \tag{151}$$

$$\left\langle z-\left(z-s\right)\right\rangle^{p-1}+pz\left(z-s\right)\Psi\left(p,z-\left(z-s\right)\right)=E^{p}, \tag{152}$$

$$z-r=DE, \tag{153}$$

$$\left(D,\ \ E\right)=1, \tag{154}$$

$$\left(DE,\ \ p\right)=1, \tag{155}$$

$$\left(DE,\ \ TN\right)=1. \tag{156}$$

(151)亦即(142).

3. 由(141),(142)及(153),(148)有

$$z-T^{p}=DE, \tag{157}$$

$$z-D^{p}=TN, \tag{158}$$

且由此有 $DE+T^{p}=D^{p}+TN,\ \ DE-D^{p}=TN-T^{p}$ 及

$$D\left(E-D^{p-1}\right)=T\left(N-T^{p-1}\right). \tag{159}$$

由(154)有 $\left(E,\ \ D^{p-1}\right)=1$，由结论 1 有 $x\neq 1$，再由(15),(153)有 $E\,D^{p-1}\neq 1$，于是由定理 5 有 $E-D^{p-1}\neq 0$，又因 $T\neq 0$，所以(159)可写为

$$\frac{D}{T}=\frac{N-T^{p-1}}{E-D^{p-1}}. \tag{160}$$

由(156)有 $\left(D,\ \ T\right)=1$，对(160)做 U 变换，令 $U\neq 0$ 为整数，

$$N-T^{p-1}=UD, \tag{161}$$

$$E-D^{p-1}=UT, \tag{162}$$

于是有 $N=T^{p-1}+UD,\ \ E=D^{p-1}+UT$，再由(153),(148)易见有

$$z-r=D^{p}+UTD, \tag{163}$$

$$z-s=T^{p}+UTD, \tag{164}$$

再由(141),(142)有

$$z=T^{p}+D^{p}+UTD. \tag{165}$$

由(141),(142),(165)易见(20)可写为

$$h = UTD, \tag{166}$$

因 $h>0,\ TD>0,$ 显然须有 $U>0.$

4. 由(149)有 $(N,\ T^{p-1})=1,$ 由定理 1 有 $(N-T^{p-1},\ NT)=1,$ 再由(161)有

$$(UD,\ NT)=1. \tag{167}$$

由(154)有 $(E,\ D^{p-1})=1,$ 由定理 1 有 $(E-D^{p-1},\ DE)=1,$ 再由(162)有

$$(UT,\ DE)=1. \tag{168}$$

由(167),(168)有

$$(U,\ DENT)=1, \tag{169}$$

及 D,T,U 两两互素。

5. 观察(166), 我们依据结论 3, 从讨论 U 之因子入手，确定 h 之因式结构。

1). 由(169),(153),(148),(15),(16)有 $(U,\ xy)=1$

2). 由(37),(15),(16)有 $(h,\ x+y)=q,$ 且有 $q\in U,$ 因为由(153),(148),(15),(16)有 $TD\in xy,$ 然而 $q\in x+y,$ 于是由(3)有 $(q,\ TD)=1.$

3). 我们注意到由(21),(22)知(36)亦即 $(s+h)+(r+h)=q^p,$ 亦即

$$r+s+2h=q^p. \tag{170}$$

若 h 不从 $p\Psi(p,x,y)$ 得到因子，则只能是 $U=q,\ \ h=qTD,$ 于是由(141),(142),(170)易得 $\dfrac{h^p}{prs}=\dfrac{r+s+2h}{p}$，由结论 9 知 $p>3$ 时(59)不能成立。事实上，结论 2 和结论 4 对此已有表述，即 h 必以 p 为因子，且 h 之因子 p 之最高指数应与 $xy\Psi(p,x,y)$ 之因子 p 之最高指数相同。本模型 $(\Psi(p,x,y),\ p)=p,\ \ (xy,\ p)=1,$ 所以令 θ 为 $\Psi(p,x,y)$ 之因子 p 之最高指数，即 $p^\theta\in\Psi(p,x,y)$ 且 $\left(\dfrac{\Psi(p,x,y)}{p^\theta},\ p\right)=1,\ \ \theta\ge 1$ 为正整数，h 从 $\Psi(p,x,y)$ 内得到因子 p^θ. 因 $q\in x+y,$ 且已有 $TD\in xy,$ 于是由(140)有 $(qTD,\ p)=1,$ 显然 h 之因子 p^θ 一定在 U 内，即 $p^\theta\in U.$ 结论 9 之意为 h 不能只含 $qTD,$ 而没说 h 到底需要多少因子，所以，不妨令 h 再从 $\Psi(p,x,y)$ 得到另一因子 $\omega,\ \ \omega\ge 1,\ \ (\omega,\ p)=1.$ 因 $\omega\in\Psi(p,x,y),\ \ TD\in xy,$ 于是由(140)有 $(TD,\ \omega)=1,$ 显然 ω 只能在 U 内，即 $\omega\in U.$ 于是有

$$U=q\,p^\theta\omega, \tag{171}$$

且(166)随之化为(143).

前两模型，$p>3$ 时，要有 $\omega>1.$ 因为那时若 $\omega=1,$ 则失去了引入 ω 的意义。而本模型却不同，因为 h 得到了 p^θ，也就是 h 在 qTD 之外得到了其它因子，结论 9 已经被满足。显然，即使不引出 $\omega,$ 也不影响证明之思路和准确性。而引出 $\omega,$ 使证明更具一般性。

4). 已得 T,D,U 两两互素，因 $p^\theta\in\Psi(p,x,y),\ \ q\in x+y,$ 由(140)显然有 $(q,\ p^\theta\omega)=1$ 且因 $(\omega,\ p)=1,$ 于是显然有 $T,D,p,q,\ \omega$ 两两互素。证毕。

结论 18　只有当 $p^{p\theta-1}\omega^p>\Psi(p,r,s)$ 时，(59)才有可能成立。

证　当 $p^{p\theta-1}\omega^p=\Psi(p,r,s)$ 时，由(141),(142),(143),(170)有 $\dfrac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\Psi(p,r,s);$

由结论 9 知，此时(59)不能成立。当 $p^{p\theta-1}\omega^p<\Psi(p,r,s)$ 时，令 $p^{p\theta-1}\omega^p=\dfrac{\Psi(p,r,s)}{t},$ $t>1,$ 由(141),(142),(143),(170)得 $\dfrac{h^p}{prs}=(r+s+2h)\dfrac{\Psi(p,r,s)}{t}.$ 因 $t>1,$ 由结论 9 知此时更有

(59)左<0, (59)更不能成立。显然只有当$p^{p\theta-1}\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，(59)才有可能成立。证毕。

结论 19　当　$p^{p\theta-1}\omega^p>\Psi(p,r,s)$　时，有　r^p+s^p 不含因子 A.，　$A\in z$，于是(25)一定不能成立。

证　由定理 7 有　$r^p+s^p=(r+s)\langle(r+s)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\rangle$，再由(31),(32),(33)知只需证

$$(Bq)^{p-1}-prs\Psi(p,r,s)\text{不含因子 }A. \tag{172}$$

由(34),(143)有

$$A-B=p^{\theta}TD\omega, \tag{173}$$

由(33)及定理 1 有$(A-B,\ AB)=1$，于是有

$$(p^{\theta}TD\omega,\ AB)=1. \tag{174}$$

由 $z=\langle(z-r)+(z-s)\rangle-\langle z-(r+s)\rangle$ 及(31),(36),(20),(143)有

$$A=q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega. \tag{175}$$

于是，由(141),(142),(173)易见(172)可写为

$$(A-p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-p(TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }A. \tag{176}$$

展开(176)中的$(A-p^{\theta}TD\omega)^{p-1}$，易见只需证明

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-p(TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }A. \tag{177}$$

由(175)知(177)亦即

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-p(TD)^p\Psi(p,r,s)\ \text{不含因子 }q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega. \tag{178}$$

因子 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$ 有两个最基本的特征，第一，它是一个两项式，第二，它的首项系数为 1. 于是显然，在$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-p(TD)^p\Psi(p,r,s)$内寻找该因子的最直接的方法就是将其它因子从 q^{p-1} 旁边拨离开。于是　$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}q^{p-1}-p(TD)^p\Psi(p,r,s)$　只能被分解为

$$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}\left\langle q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\frac{\Psi(p,r,s)}{p^{p\theta-1}\omega^p}\right\rangle.$$

第一因子$(p^{\theta}TD\omega)^{p-1}$　不含因子　$q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$，因为由(173),(174)有

$$(p^{\theta}TD\omega,\ q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega)=1. \tag{179}$$

第二因子 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\dfrac{\Psi(p,r,s)}{p^{p\theta-1}\omega^p}$　很象　$q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$，且显然，当 $p^{p\theta-1}\omega^p=\Psi(p,r,s)$　时，它恰好就是 $q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega$，然而，我们已有结论 18，本结论的前提是 $\omega^p>\Psi(p,r,s)$. 于是显然，(178)成立。本结论证毕。本模型证毕。本定理证毕。

我们注意到，当 $p^{p\theta-1}\omega^p>\Psi(p,r,s)$时，有　$0<\dfrac{\Psi(p,r,s)}{p^{p\theta-1}\omega^p}<1$，且由$(r+s+2h)-2h>0$及(170), (143)有　$q^p-2q\,p^{\theta}TD\omega>0$，即　$q^{p-1}-2\,p^{\theta}TD\omega>0$. 于是由定理 9 有

$$1<\frac{q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega\dfrac{\Psi(p,s)}{p^{\ p\theta-1}\omega^p}}{q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega}<2. \tag{180}$$

4. 结语

1. 引言：“ n 为奇素数时， 将二项式定理写为 …，且变形成为 … ，式中 … 为一个代数式， 因 n 而异，而 n 为奇和数时写不成。” 这写不成之原因见 2. 互素理论 第(8)式至第(11)式之前的叙述。 n 为奇和数时，令 $n=kp$， k 为正整数， p 为奇素数，方程写为

$\left(x^k\right)^p+\left(y^k\right)^p=\left(z^k\right)^p$. 同理， $n=4$ 证出， $n=4k$ 随之解决，方程写为 $\left(x^k\right)^4+\left(y^k\right)^4=\left(z^k\right)^4$. 潘承洞、潘承彪著《初等数论》（北京大学出版社，1992.）中有 $n=4$ 和 $p=3$ 的证明，但没说是否与首证者原作相同。

17 世纪以来，许多第一流的数学家都试图重新作出费马宣称已得到的证明，或者发现另一个证明，但都没有成功。 …FLT 简史可见《数学专业英语文选》下册，南京大学外文系公共英语教研室编，商务印书馆，1979，北京。

2. 整数变量有内部结构 (inner designs) 是互素理论与函数理论，在出发点上，带有本质性的区别。互素理论着眼于互素因子之生灭，是因子的脱胎换骨，涅槃，函数理论只是变量之间的依赖，对应。

我们令 $z=(x+y)-h,\ \ x=z-r,\ \ y=z-s$ 等，都是在剖切变量，看结构。看 x,y,z 必须具有怎样的结构，结构之间必须满足怎样的关系，费马方程才可能有整数解。我们历尽艰辛，查出了这结构，弄清了这关系，

第一模型：

$$\begin{gathered}
x=D^p+q\,p^\theta TD\omega=s+h=s+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega\\
=(z-y)+(x+y)^{1/p}\left\{p(z-x)\right\}_\wedge^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
y=p^{p\theta-1}T^p+q\,p^\theta TD\omega=r+h=r+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,\\
=(z-x)+(x+y)^{1/p}\left\{p(z-x)\right\}_\wedge^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
z=p^{p\theta-1}T^p+D^p+q\,p^\theta TD\omega=r+s+h=r+s+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,\\
=qA=(x+y)-h=(x+y)-(x+y)^{1/p}\left\{p(z-x)\right\}_\wedge^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素，}\ r=p^{p\theta-1}T^p,\ \ s=D^p,\ \omega\in\Psi(p,x,y),\ \ h=q\,p^\theta TD\omega,\\
q=(x+y)^{1/p}=(r+s+2h)^{1/p}=\left(p^{p\theta-1}T^p+D^p+2q\,p^\theta TD\omega\right)^{1/p},\\
p^{p\theta-1}T^p+D^p=qB,\ \ A=q^{p-1}-p^\theta TD\omega.
\end{gathered}$$

第二模型：

$$\begin{gathered}
x=D^p+q\,p^\theta TD\omega=s+h=s+\left\{p\left((s+h)+(r+h)\right)\right\}_\wedge^{1/p}(pr)^{1/p}s^{1/p}\omega,\\
=(z-y)+\left\{p(x+y)\right\}_\wedge^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
y=T^p+q\,p^\theta TD\omega=r+h=r+\left\{p\left((s+h)+(r+h)\right)\right\}_\wedge^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\omega,\\
=(z-x)+\left\{p(x+y)\right\}_\wedge^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
z=T^p+D^p+q\,p^\theta TD\omega=r+s+h=r+s+\left\{p\left((s+h)+(r+h)\right)\right\}_\wedge^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\omega\\
q\,p^\theta A=(x+y)-h=(x+y)-\left\{p(x+y)\right\}_\wedge^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\omega,\\
\omega\in\Psi(p,x,y),\ \ T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素，}\ r=T^p,\ \ s=D^p,\ \ h=q\,p^\theta TD\omega,\\
q\,p^\theta=\left\{p(x+y)\right\}_\wedge^{1/p}=\left\{p(r+s+2h)\right\}_\wedge^{1/p}=\left\{p\left(T^p+D^p+2q\,p^\theta TD\omega\right)\right\}_\wedge^{1/p},\\
T^p+D^p=q\,p^\theta B,\ \ A=q^{p-1}\,p^{(p-1)\theta-1}-TD\omega.
\end{gathered}$$

第三模型：

$$\begin{gathered}
x=D^p+qTD\,p^\theta\omega=s+h=s+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\,p^\theta\omega\\
=(z-y)+(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\,p^\theta\omega,\\
y=T^p+qTD\,p^\theta\omega=r+h=r+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\,p^\theta\omega\\
=(z-x)+(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\,p^\theta\omega,\\
z=T^p+D^p+qTD\,p^\theta\omega=r+s+h=r+s+\left\{(s+h)+(r+h)\right\}_\wedge^{1/p}r^{1/p}s^{1/p}\,p^\theta\omega\\
qA=(x+y)-h=(x+y)-(x+y)^{1/p}(z-x)^{1/p}(z-y)^{1/p}\,p^\theta\omega.\\
p^\theta\omega\in\Psi(p,x,y),\ \ T,D,p,q,\omega\ \text{两两互素，}\ r=T^p,\ \ s=D^p,\ \ h=qTD\,p^\theta\omega,
\end{gathered}$$

$$q=(x+y)^{1/p}=\{r+s+2h\}^{1/p}=\left(T^p+D^p+2q\,p^{\theta}TD\omega\right)^{1/p},$$
$$T^p+D^p=qB,\quad A=q^{p-1}-p^{\theta}TD\omega.$$

而同时，或者说稍晚些时候，却发现这结构，这关系中存在矛盾。于是得出结论：费马方程无整数解，FLT 成立。

3. 让人相信这篇文章是困难的，领路人没用过此种方法。看懂这篇文章也是困难的，不相信它，也就很难看下去。一切用新思想写成的文章都难免此遇，而首先读懂它的人将功在历史，如 1857 年，Riemann 的四篇关于 Abel 积分和 Abel 函数的论文。